

Estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia

Luis Eduardo Arango¹
Luis Fernando Melo
Diego Mauricio Vásquez

Abstract

This paper presents an estimation of the term structure of Colombian interest rates using the Nelson and Siegel model (1987), a method worldwide accepted. Following conventional criterion, this estimation is better than the CETES curve of the Colombian stock exchange. The evolution of the forward rate curve suggests a decrease in the expectations about the inflation trend along 2001.

Resumen

En este trabajo se presenta una estimación de la estructura a plazo de las tasas de interés en Colombia, utilizando el método de Nelson y Siegel (1987). Se trata de la primera estimación realizada en el país que emplea un método de aceptación internacional. Siguiendo criterios convencionales, esta estimación supera la curva CETES de la Bolsa de Colombia. La evolución de la curva de la tasa forward permite sugerir, mediante la ayuda de algunos supuestos, una disminución en las expectativas de inflación a lo largo de 2001.

Keywords: Interest rate, Asset valuation, Stock market.

Palabras clave: Tasa de interés, Valoración de activos, Mercado de capitales.

¹ Investigadores de la Subgerencia de Estudios Económicos del Banco de la República. Las opiniones expresadas en este documento son de responsabilidad exclusiva de los autores y no reflejan necesariamente las del Banco de la República ni las de su Junta Directiva. Agradecemos a Lars Svensson por proveernos el código que sirvió de base para las estimaciones por el método de Nelson y Siegel, a Silvia Juliana Mera, del Banco de la República, por suministrarnos la información, y a Claudia Gómez, de la Bolsa de Valores de Colombia, y Carlos Esteban Posada, del Banco de la República, por sus comentarios y sugerencias. De igual manera, agradecemos los comentarios de los asistentes a los seminarios del Banco de la República y Fedesarrollo. Un especial agradecimiento para Camilo Santos, de la Universidad de los Andes y de la Bolsa de Valores de Colombia, por su valiosa colaboración al realizar la comparación de metodologías y resultados de las curvas.

1. INTRODUCCIÓN

La estimación e interpretación de la estructura a plazo ha sido, por largo tiempo, de interés para la profesión debido, por un lado, a la posibilidad que ofrece de valorar activos en la economía y, por otro, a la información de carácter económico que contiene. En consecuencia, en este trabajo se estima la estructura a plazo de las tasas de interés para Colombia utilizando los métodos de Nelson y Siegel (1987) y de McCulloch (1971). Sin embargo, es en el primero de ellos en el que centramos nuestra atención.

La necesidad de contar con una estimación confiable de la estructura a plazo en Colombia, se había venido acentuando, en primer lugar, por la mayor profundidad y liquidez relativa alcanzada por el mercado, máxime ahora que se cuenta con títulos renta fija -que es preciso valorar, al igual que muchos otros activos en la economía- cuyo vencimiento se produce a mediano plazo y, en segundo, por la presencia que ha comenzado a registrarse en el mercado de bonos de cupón cero con vencimiento a tres y seis meses. El potencial de valoración de la estructura a plazo se puede dimensionar al tener en cuenta que, por ejemplo, los indicadores de solvencia de las firmas bancarias serán más confiables, cuanto mejor valorados sean los activos que se usan para conformar dichos indicadores.

En relación con el contenido de información de la estructura a plazo, la dinámica que induce la política económica en las variables económicas objetivo suele generar incertidumbre sobre su efectividad. Por ello, es común que los bancos centrales observen la evolución de un amplio número de variables que se encuentran posiblemente relacionadas con sus objetivos a distintos plazos. La tarea de hacer seguimiento a estas variables no es sencilla,

debido a que con frecuencia la información no está disponible de manera oportuna o precisa, o porque su interpretación es difícil y requiere, por tanto, la elección de un modelo económico y unas herramientas estadísticas de alto nivel técnico. Sin embargo, algunas de estas variables, como la curva de rendimientos, escapan a tales problemas.

En este sentido, la estructura a plazo constituye un indicador central de los mecanismos de transmisión monetaria. El resultado es que la misma suele utilizarse para predecir el comportamiento futuro de las tasas de interés, las expectativas de inflación², la actividad económica y el déficit fiscal [véase Arosemena y Arango (2002) y las referencias que allí aparecen].

La estimación de la curva de rendimientos que presenta este documento constituye el primer intento que se efectúa utilizando métodos que gozan de amplio reconocimiento dentro de la literatura relacionada. Hasta la fecha, en Colombia se venía contando, sin embargo, con la estimación que en la actualidad realiza la Bolsa de Valores de Colombia y que anteriormente venía haciendo la Bolsa de Bogotá. No obstante, el método de ajuste de la curva CETES no se apoyaba en métodos ampliamente reconocidos.

El desarrollo del trabajo ha contado con la colaboración de algunos expertos de la Bolsa de Colombia, quienes en la actualidad se encuentran trabajando para mejorar la estimación de la curva que se

² La necesidad de contar con una curva confiable se había venido haciendo más evidente debido a la estrategia de *inflation targeting* seguida ahora por la autoridad monetaria, dado que, con la ayuda de algunos supuestos, las expectativas de los agentes sobre la variación en el nivel general de precios pueden inferirse a partir de la curva.

conoce como CETES. Dichos resultados preliminares han sido incorporados en este trabajo con el único propósito de comparar los resultados obtenidos. Sin embargo, debe tenerse presente que estos resultados de la Bolsa de Colombia son preliminares.

Adelantando un poco las conclusiones del trabajo, puede advertirse que, siguiendo criterios convencionales, nuestra estimación, basada en el método de Nelson y Siegel, supera la curva CETES de la Bolsa de Colombia. De acuerdo con la evolución de la curva de la tasa *forward*, algunas interpretaciones preliminares sugieren una disminución en las expectativas de inflación a lo largo de 2001, año para el cual se hicieron las estimaciones de este documento.

El trabajo se desarrolla de la siguiente forma. La sección uno es esta introducción. La sección dos contiene algunos aspectos generales sobre los títulos de renta fija y definiciones relacionadas con las tasas corrientes, las tasas a plazo y la propia curva de rendimientos. En esta sección también se incluyen los elementos que, en teoría, determinan la forma de la curva. La sección tres presenta los resultados de las estimaciones y ofrece algunas interpretaciones preliminares de los resultados. La sección cuatro discute algunos criterios para ordenar los métodos de estimación. Finalmente, la sección cinco presenta unos breves comentarios finales.

II. ESTRUCTURA A PLAZO DE LA TASA DE INTERÉS

A. Elementos básicos

Los bonos de renta fija suelen dividirse en bonos con cupón y bonos de cupón cero. Los primeros identifican aquellos documentos mediante los cua-

les el emisor se compromete a pagar al inversionista o tenedor del mismo una suma fija, denominada cupón, en los períodos señalados en el prospecto de emisión del título y un valor final, denominado principal o valor facial³, al momento del vencimiento, aunque no exclusivamente ya que existe la posibilidad de hacer abonos del principal durante el período de subsistencia de la obligación. La tasa cupón equivale al valor del cupón sobre el valor facial y no es otra cosa que la tasa de interés que el emisor acuerda pagar cada año⁴. El cupón es el monto anual por concepto de intereses. Los bonos de cupón cero, por su parte, identifican aquellos títulos mediante los cuales se pacta un solo pago final sin ningún pago periódico intermedio⁵.

El plazo de maduración (*term to maturity*) es el número de años en los cuales el emisor del bono promete realizar los pagos pactados incluyendo el correspondiente al principal. De esta manera, el plazo de maduración identifica la fecha en la cual desaparecen las obligaciones del emisor.

Los prospectos de emisión de algunos bonos incluyen, en ocasiones, provisiones que dotan al emisor o al tenedor del bono de posibilidades que aumentan el riesgo de contraparte. La más común entre dichas posibilidades es la incorporación de opciones de llamado (*call provision*), la cual le permite al emisor el derecho a retirar la deuda, total o parcialmente antes de su fecha de vencimiento. Los títulos

³ También conocido como valor de redención, valor a la maduración o valor par.

⁴ En Estados Unidos y Japón, se suelen hacer pagos semestrales, mientras que en Europa al igual que en Colombia se suele pagar el cupón una vez por año.

⁵ En el caso del mercado norteamericano este tipo de títulos se conocen como T-bills, cuyo vencimiento es inferior a un año.

también pueden incluir provisiones *put*⁶. Sin embargo, por simplicidad, no vamos a referirnos a bonos con estas dos posibilidades.

El precio de un bono es igual al valor presente del flujo de caja esperado. Esto implica la necesidad de calcular un rendimiento requerido, el cual refleja el rendimiento de instrumentos financieros de riesgo similar o de inversiones alternativas.

El flujo de caja de un bono incluye los pagos periódicos del cupón de interés hasta la fecha de vencimiento y el valor par. De esta manera, el precio, p , de un bono se calcula como⁷:

$$p = \sum_{t=1}^n \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{fv}{(1+y)^n} \quad (1)$$

donde c identifica el valor del cupón semestral, fv el valor facial y y el *yield* requerido. Este último será igual a la tasa interna de retorno (rendimiento al vencimiento o *yield to maturity*) cuando consiga igualar el precio del título al valor presente del flujo de caja.

En el caso de un bono de cupón cero, el precio se estima simplemente como:

$$p = \frac{tp}{(1+s)^n} \quad (2)$$

donde tp identifica el pago total al vencimiento y s en este caso identifica la tasa corriente o *spot* (compueta anualmente) para un bono de cupón cero.

La estructura a plazo de la tasa de interés es la relación entre los rendimientos de títulos con similar calidad crediticia, regularmente libres de riesgo, pero con diferente período de maduración. La representación gráfica de la estructura a plazo de las tasas de interés se conoce como curva de rendimientos (*yield curve*).

Sin embargo, las curvas de rendimiento construidas con base en el rendimiento al vencimiento tienen por lo menos dos inconvenientes. El primero se asocia con el hecho de tener una sola tasa de interés (constante) para hacer el descuento del flujo de caja que genera el activo y para realizar la reinversión de los cupones. Este supuesto (de tener una tasa constante) es bastante fuerte. El segundo, tiene que ver con lo que se conoce como el "efecto cupón": dos bonos con el mismo vencimiento generalmente tienen diferente rendimiento a la maduración si la tasa cupón es diferente. Por tal razón se recomienda la utilización de los rendimientos al vencimiento de bonos de cupón cero o de la tasa a plazo o *forward* resultante.

El rendimiento al vencimiento de bonos con cupón es diferente del rendimiento al vencimiento de los bonos de cupón cero al mismo vencimiento, como lo sugieren las expresiones (1) y (2). Los bonos con cupón pueden, sin embargo, ser interpretados como un paquete de instrumentos de cupón cero. Es decir, cada instrumento de cupón cero en el paquete tiene un vencimiento igual al de su fecha de pago de cupón o en el caso del principal, la fecha del vencimiento.

El valor del bono debería ser igual al valor de todos los instrumentos de cupón cero que lo componen.

⁶ Como es el caso, por ejemplo, del *Yankee 09 put 05*, título que vence en el año 2009 y que da al tenedor el derecho, pero no la obligación, de redimir el título en el año 2005.

⁷ Por facilidad, las expresiones matemáticas iniciales se presentan en tiempo discreto.

Si esto no fuera cierto, sería posible que los participantes del mercado obtuvieran ganancias sin asumir riesgos. En consecuencia, el rendimiento al vencimiento de un bono cupón es una especie de promedio de los rendimientos al vencimiento de los bonos de cupón cero con maduración desde el pago del primer cupón hasta el momento del pago del último cupón y del principal.

La relación existente entre las tasas corrientes y a plazo resultante se hace evidente al utilizar la condición de arbitraje. Considere, por ejemplo, el caso de un inversionista que planea una inversión a un año. Para tal efecto él tiene, por lo menos, dos posibilidades: i) adquirir un bono de cupón cero con vencimiento en un año, o ii) adquirir dos bonos de cupón cero: el primero con vencimiento en seis meses y, en ese momento, uno más con vencimiento en seis meses.

En el ejemplo, el inversionista tendrá incertidumbre sobre la tasa *forward* (que estará vigente dentro de seis meses) para bonos con maduración seis meses después. Utilizando el principio de arbitraje, la tasa *forward* para inversiones a seis meses es la tasa que haría indiferente al inversionista entre las dos alternativas. Adoptando cualquier vía (i ó ii) el inversionista deberá recibir la misma suma (\$100, digamos) al finalizar el año. Lo anterior significa:

$$\frac{100}{(1 + s_2)^2} = \frac{100}{(1 + s_1) \times (1 + f)} \Rightarrow \approx f = 2s_2 - s_1 \quad (3)$$

donde s_2 es la tasa *spot* del bono a seis meses (la tasa *spot* anual dividida en dos); s_1 es la tasa *spot* del pagaré a seis meses y f es la tasa a plazo que se espera esté vigente dentro de seis meses para colocaciones a seis meses. De esta forma, la tasa f se interpreta como el incremento marginal en la tasa de

retorno producido por un incremento marginal en el horizonte de inversión (Seppälä y Viertiö, 1996).

Sea $f(t, t', T)$ la tasa a plazo resultante, compuesta continuamente y medida en porcentaje anual, de una inversión realizada en el momento t (fecha de negociación), la cual comienza en el momento $t'(> t')$, el período de la inversión, y que termina en el momento $T(> t')$, la fecha de vencimiento. En este caso, la tasa a plazo se relaciona con la tasa *spot* de la siguiente manera:

$$f(t, t', T) = \frac{(T - t) s(t, T) - (t' - t) s(t, t')}{(T - t')} \quad (4)$$

La tasa *forward* instantánea resultante se puede obtener haciendo que la diferencia entre el tiempo al vencimiento de la primera alternativa y el tiempo de vigencia del segundo bono, en la segunda alternativa, tienda a cero. Puede señalarse, inclusive, que la tasa *spot* para el período $m(= T - t)$, $s(m)$, es el promedio de las tasas a plazo:

$$s(m) = \frac{1}{m} \int_{t=0}^m f(t) dt \quad (5)$$

Esta asociación entre la tasa *spot* y la tasa a plazo es relativamente simple cuando se trata de bonos de cupón cero. Sin embargo, cuando el cómputo requiere la utilización de bonos con cupón, el proceso de estimación es un poco más complicado, por razones como las mencionadas en la sección anterior.

B. Expectativas y primas

Existen dos determinantes principales de la forma de la curva de rendimientos: las expectativas y la

prima de riesgo⁸. De acuerdo con la primera, las tasas *forward* son predictores insesgados de las tasas *spot* futuras. Por ello, las tasas *forward* en contratos a largo plazo actuales están estrechamente relacionadas con las expectativas del mercado sobre las tasas *forward* a corto plazo. Por lo tanto, la estructura a plazo completa refleja en un momento dado, las expectativas actuales del mercado para la familia de tasas a futuro a corto plazo.

Esta teoría puede ser modificada para incluir una prima de liquidez. Para ilustrar esto considere una ecuación de Euler derivada de un modelo de optimización (neoclásico) de un agente representativo⁹:

$$1 = \beta R_t E_t \left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right] \quad (6)$$

⁸ Más adelante nos referimos a factores adicionales no explicados por el modelo considerado aquí. Dichos factores tienen que ver con el hábitat preferido y con la segmentación del mercado. Además de estos argumentos, algunos analistas también incluyen (e.g. Salomon Brothers, 2000) como determinante de la forma de la estructura a plazo, el sesgo de convexidad. Distintos bonos tienen distintas características de convexidad y estas diferencias de convexidad entre los vencimientos pueden dar lugar a diferencias en rendimientos. El sesgo de convexidad se refiere al impacto que estas diferencias de convexidad tienen en la forma de la curva de rendimientos. Algunos resultados conocidos sobre la convexidad son los siguientes. Primero, bonos de cupón cero de largo plazo tienen una alta convexidad, lo cual tiende a reducir el precio. Otros resultados importantes son los siguientes. Segundo, en la medida en que el yield requerido aumenta (disminuye), la convexidad de un bono disminuye (aumenta). Tercero, para un plazo y un yield dados, cuanto más bajo es el cupón mayor es la convexidad del bono. Por lo tanto, los bonos de cupón cero tienen la mayor convexidad. Intuitivamente, lo que ocurre es que el precio del bono está recogiendo lo bajo del cupón, de manera que el descuento es mayor. Otra manera de interpretar esta propiedad es diciendo que cuanto mayor es el descuento, mayor es la convexidad del bono. Por último, para un yield y una duración modificada dados, cuanto menor es el cupón, menor es la convexidad. En este caso, los bonos de cupón cero, tienen la menor convexidad para una duración modificada dada (Fabozzi, 2000).

⁹ Modelos de este estilo se encuentran en Sargent (1987) y Campbell, Lo y MacKinlay (1997). Véase también Shiller (1990).

donde E_t es el operador de expectativas el cual actúa sobre la base de toda la información relevante hasta el período t , $\beta \in (0,1)$ es un factor de descuento constante, $u'(c_t)$ es la utilidad marginal del consumo del período t y R_t es la tasa (bruta) de retorno real de los bonos libre de riesgo. De acuerdo con (6) las decisiones de los agentes varían hasta que los costos marginales de sacrificios en el consumo en el período t igualan a las ganancias marginales en el período $t+1$.

Supóngase que el agente tiene acceso a bonos con vencimiento en uno y dos períodos, en cuyo caso las ecuaciones de Euler asociadas son:

$$1 = \beta R_{1t} E_t \left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right] \Rightarrow R_{1t}^{-1} = \beta E_t \left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right] \quad (7)$$

$$1 = \beta^2 R_{2t} E_t \left[\frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)} \right] \Rightarrow R_{2t}^{-1} = \beta^2 E_t \left[\frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)} \right] \quad (8)$$

Tomando en cuenta la definición de la tasa *spot* dada en la expresión (2), $p = tp/(1+r)^n$, suponiendo que $tp = 1$, y utilizando la notación $R_{1t}^{-1} = 1/(1+r_t)$ y $R_{2t}^{-1} = 1/(1+r_{2t})^2$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$p_{1t} = \beta E_t \left[\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right] \quad (9)$$

$$p_{2t} = \beta^2 E_t \left[\frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_t)} \right] \quad (10)$$

utilizando la ley de expectativas iteradas, la expresión (10) puede ser descompuesta en:

$$p_{2t} = E_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \beta \frac{u'(c_{t+2})}{u'(c_{t+1})} \right] = E_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} p_{1t+1} \right] \quad (11)$$

la cual, utilizando la definición de covarianza, permite obtener una versión generalizada de la teoría de expectativas de la estructura a plazo:

$$p_{2t} = E_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \right] E_t [p_{1t+1}] + \text{cov}_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, p_{1t+1} \right] \quad (12)$$

$$= p_{1t} E_t [p_{1t+1}] + \text{cov}_t \left[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}, p_{1t+1} \right]$$

El primer término del lado derecho de (12) es el término de expectativas mientras que el segundo constituye la prima de riesgo o prima de liquidez¹⁰ (*term premium*). Dicha expresión significa que cuando hay una covarianza positiva entre el crecimiento del consumo y los precios de los bonos de corto plazo, los bonos de largo plazo conllevarán una prima de riesgo positiva.

De acuerdo con (12) la teoría de las expectativas se cumple en algunos casos especiales. Un ejemplo, se presenta cuando el agente es neutral al riesgo, con respecto al consumo, lo cual reportaría una función de utilidad lineal en el consumo. Esto significa que $u'(c_{t+1})/u'(c_t) = 1$ para todo t y $\text{cov}_t[\beta u'(c_{t+1})/u'(c_t), p_{1t+1}] = 0$. Otra posibilidad surge cuando no hay incertidumbre en cuyo caso $\text{cov}_t[\beta u'(c_{t+1})/u'(c_t), p_{1t+1}] = 0$. Por lo tanto, en la medida en que los agentes tienen aversión al riesgo, existe incertidumbre y los precios de los bonos están correlacionados con el crecimiento del consumo, los precios de los bonos conllevarán una prima de riesgo.

Un supuesto fundamental de la hipótesis de expectativas puras es que todos los títulos (del gobierno, por ejemplo), independientemente de su madurez, tienen el mismo retorno esperado. Sin embargo, algunas teorías sugieren que los retornos de los títulos pueden variar entre estos por motivos que podrían estar explicados por teorías como el hábitat preferido (Modigliani y Sutch, 1967) o por la segmentación de mercado (Culbertson, 1957).

La teoría del hábitat preferido, aunque postula que la trayectoria de la estructura a plazo refleja tanto las expectativas como una prima de riesgo, plantea que esta última no debe crecer, necesariamente, con la madurez ya que los inversionistas pueden estar interesados en unos sectores de vencimiento particulares. En el caso en que oferta y demanda de fondos en un rango de vencimiento no se compensen, algunos emisores e inversionistas serán inducidos a cambiar vencimientos para lo cual ellos deberán ser compensados en una magnitud tal que refleje su grado de aversión al riesgo.

La teoría de la segmentación del mercado, por su parte, plantea que los inversionistas tienen hábitats preferidos dependiendo de la naturaleza de sus obligaciones. De acuerdo con esta teoría, las restricciones en la administración de activos y pasivos, por un lado, o preferencias de emisores o inversionistas a permanecer en sectores de vencimiento específicos, tienen especial importancia. La teoría de la segmentación de mercado difiere de la teoría del hábitat preferido en que ni emisores ni inversionistas están dispuestos a moverse de un sector de maduración a otro para tomar ventaja de diferencias entre expectativas y tasas a futuro.

III. DETALLES DE LA ESTIMACIÓN Y RESULTADOS

La mayoría de la literatura académica que utiliza métodos numéricos para estimar la estructura a pla-

¹⁰ Dicha prima de riesgo puede ser entendida como el exceso de retorno correspondiente a un período de un bono de largo plazo con respecto al retorno correspondiente a un período de un bono de corto plazo. Una prima de riesgo positiva reflejaría una curva de rendimiento con pendiente positiva.

zo, siguiendo a McCulloch (1971), restringe explícitamente los flujos de caja de diferentes bonos adeudados al mismo tiempo a ser descontados a la misma tasa. Desde entonces, la investigación se ha llevado a cabo entre dos diferentes métodos de investigación: uno se concentra en la flexibilidad de la curva (precisión) y el otro en la suavidad. Los trabajos posteriores se han ajustado a dicho *trade-off*.

De acuerdo con ello, la estructura a plazo de las tasas de interés puede ser estimada en formas diferentes. En este artículo se utilizan los títulos del gobierno explorando dos modelos: McCulloch (1971) y Nelson y Siegel (1987)¹¹. Detalles sobre dichos métodos se encuentran en el Anexo 1. A continuación se presentan las curvas de las tasas de interés generadas por cada uno de los métodos.

A. Método de McCulloch

Suponiendo una estructura a plazo continua y basados en el teorema de *Weierstrass*, la estructura puede ser aproximada, con grados de precisión arbitrarios, por un polinomio. Brevemente, este método requiere la especificación de una base de funciones. De esta forma, la función de descuento se construye como una combinación lineal de las funciones base, las cuales se estiman utilizando los precios de los bonos. McCulloch sugirió definir las funciones base como polinomios cuadráticos o cúbicos. Como se verá más adelante, un problema con las *splines* de McCulloch es que producen oscilaciones en la curva *forward*¹².

Con el fin de comparar los resultados obtenidos a partir de la metodología de Nelson y Siegel, pre-

sentamos a continuación las estimaciones de las tasas *spot*, *forward*, y de la función de descuento correspondientes a los días 25 de enero de 2001 y octubre 4 de 2001, escogidos arbitrariamente.

Para la primera fecha se obtienen unos resultados contraintuitivos ya que tanto para la tasa *forward* como para la *spot* se obtienen valores negativos en el *short-end* de la curva. Dichos resultados se identifican con la falta de monotonicidad (joroba) que presenta la función de descuento al inicio¹³. Para la segunda, los resultados son mejores ya que ni la tasa *spot* ni la *forward* arrojan valores negativos por lo que la función de descuento es más intuitiva. Sin embargo, las tasas no adoptan el mismo comportamiento que se observa bajo la metodología de Nelson y Siegel.

Al aplicar el método de McCulloch, para cada jueves¹⁴ (disponible) entre enero y octubre de 2001 se encontró que aproximadamente el 50% de los días las tasas *spot* y *forward* arrojaron resultados negativos en el *short-end* de sus respectivas curvas, incluso en muchas ocasiones se observó un alto grado de volatilidad en la función de descuento. Este tipo de resultados no sorprende, si se tiene en cuenta que la aproximación a la función continua de descuento se hace a partir de funciones poli-

¹² Una forma de evitar este efecto es incrementando el orden del polinomio para estimar, por ejemplo, una *spline* cúbica. La implementación más simple de una *spline* cúbica se presentó en McCulloch (1975). La función resultante puede ser muy flexible ya que la función de descuento no se restringe a ser no-creciente; sin embargo, las tasas *forward* pueden volverse negativas.

¹³ Sobre las limitaciones de la metodología de McCulloch y otras críticas véase Shea, (1986).

¹⁴ Se escogió el jueves sobre la base de que es un día de transacciones menos afectadas por la colocación de TES y por el cierre o la apertura de la semana.

¹¹ Sin embargo, existen muchas otras posibilidades. Entre las que se destacan están, por ejemplo, Shea (1984), Vasicek y Fong (1986), Steely (1991).

nómicas cuadráticas segmentadas bajo un enfoque de regresión lineal.

Los Gráficos 1 y 2 presentan los resultados de las estimaciones para las fechas señaladas. Los valores negativos de las tasas *spot* y *forward*, así como la forma de la función de descuento inhabilitan este método como mecanismo exclusivo de estimación de la curva. Sin embargo, en ocasiones, McCulloch ofrece una posibilidad de comparación con resultados de otras metodologías como ocurre en el caso de octubre 4 de 2001.

B. Método de Nelson y Siegel^{15, 16}

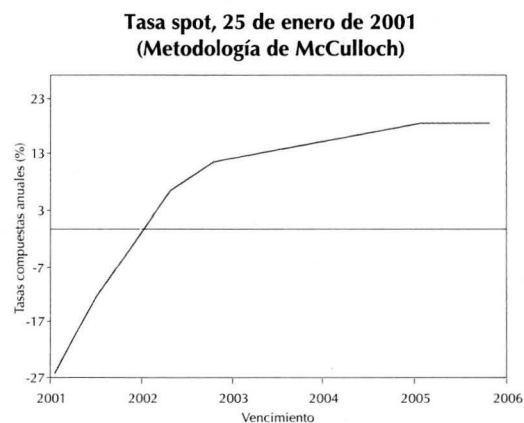
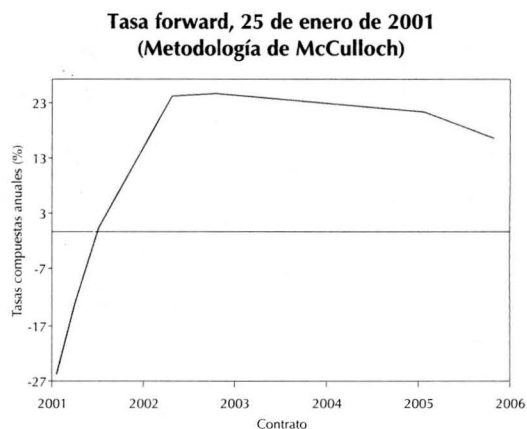
La estimación por este método, explicada en el Anexo 1, es siempre mejor comportada que la obtenida por el método McCulloch.

Para ilustrar los resultados del método de Nelson y Siegel, se han tomado de nuevo el 25 de enero y el 4 de octubre de 2001. El Gráfico 3A y B muestra las estimaciones de la tasa *spot*, la tasa *forward* y el *yield to maturity*. También muestran las tasas cupón y el *yield* observado. El Gráfico 3A presenta una estimación en la cual se impone la restricción de que tanto la curva *spot* como la curva *forward* comiencen en el mismo punto, la tasa interbancaria (TIB) para préstamos *overnight* con vencimiento a un día. La estimación del Gráfico 3B no impone dicha restricción. De todos modos, en ambos casos se esperan tasas crecientes.

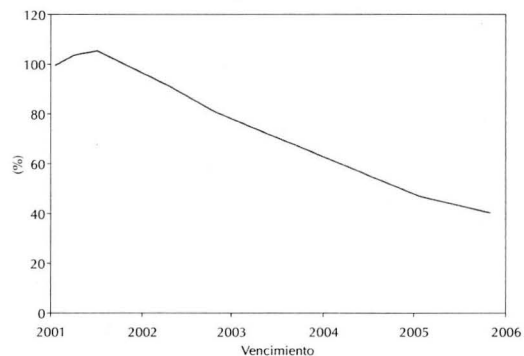
¹⁵ El código Gauss se encuentra disponible para uso de los interesados en el sitio <http://www.banrep.gov.co/docum/borra-sem/borra196-4.htm> donde además se encuentra una versión preliminar de este documento.

¹⁶ Para aplicaciones recientes de este método en países del área véase Lefort y Walker (2000).

Gráfico 1. ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA A PLAZO POR EL MÉTODO DE McCULLOCH



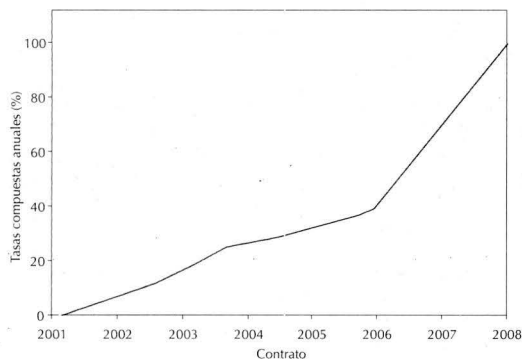
Función de descuento estimada, 25 de enero de 2001 (Metodología de McCulloch)



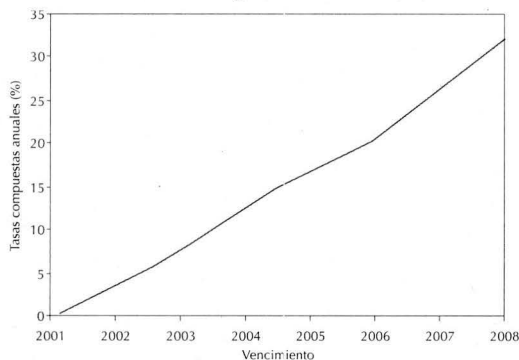
Fuente: cálculo de los autores.

Gráfico 2 ESTIMACIÓN DE LA ESTRUCTURA A PLAZO POR EL MÉTODO DE McCULLOCH

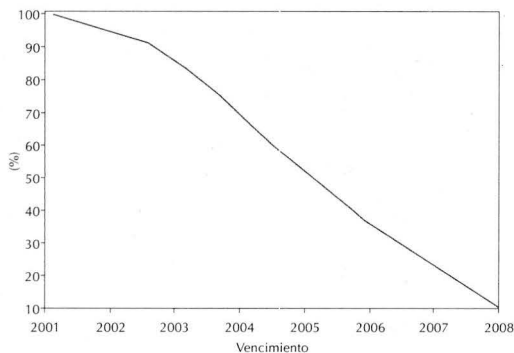
Tasa forward, 4 de octubre de 2001
(Metodología de McCulloch)



Tasa spot, 4 de octubre de 2001
(Metodología de McCulloch)



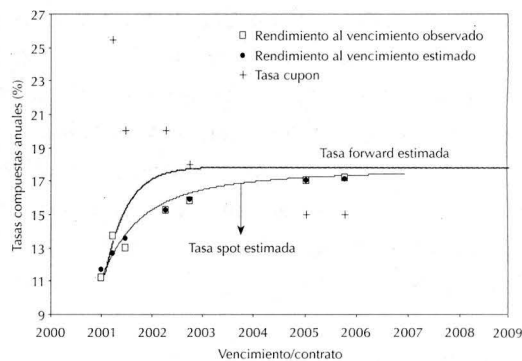
Función de descuento estimada, 4 de octubre de 2001
(Metodología de McCulloch)



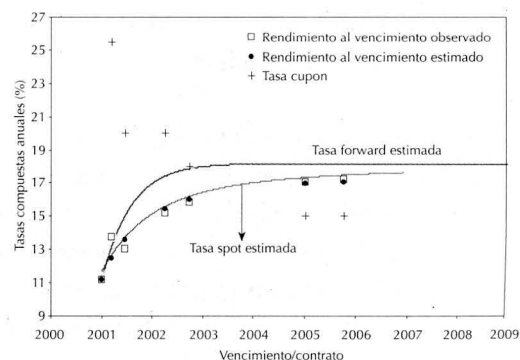
Fuente: cálculo de los autores.

Gráfico 3 TASAS *SPOT*, *FORWARD* Y DE RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO ENERO 25 DE 2001

A. Metodología de Nelson y Siegel con restricción



B. Metodología de Nelson y Siegel sin restricción



Fuente: cálculo de los autores.

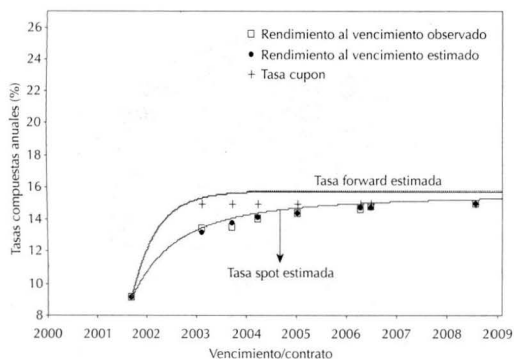
En el Gráfico 4A y B, realizado para el 4 de octubre de 2001, también se esperan tasas crecientes en el futuro. Sin embargo, estas ya no están por encima del 17% como en las primeras Figuras correspondientes al 25 de enero, sino por debajo del 16%.

En los Gráficos 5 a 8 se presenta la evolución de las tasas a lo largo de 2001 en frecuencia semanal (Jueves de cada semana), con y sin la restricción de que las tasas *spot* y *forward* comiencen al nivel de la TIB *overnight*. La evolución de cada curva se obser-

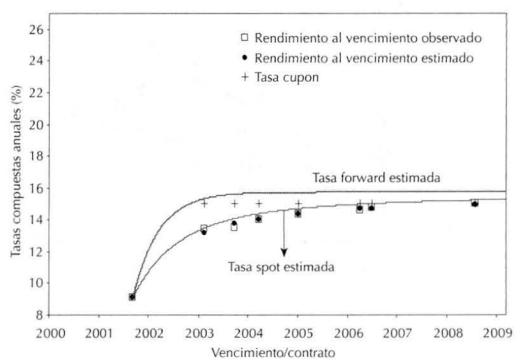
Gráfico 4

TASAS SPOT, FORWARD Y DE RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO OCTUBRE 4 DE 2001

A. Metodología de Nelson y Siegel con restricción



B. Metodología de Nelson y Siegel sin restricción

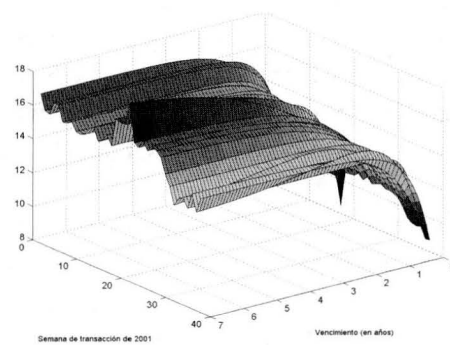
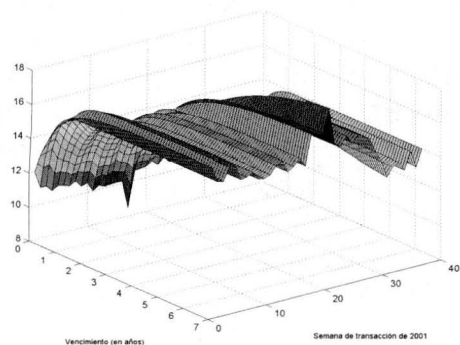
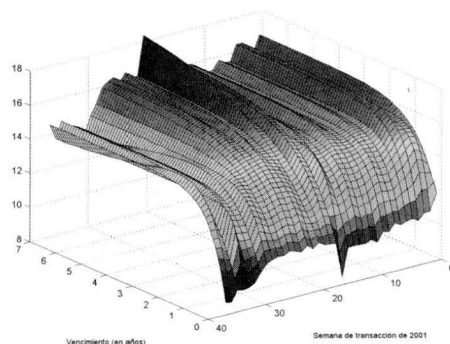
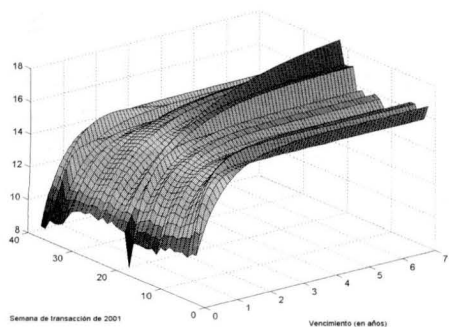


Fuente: cálculo de los autores.

Gráfico 5

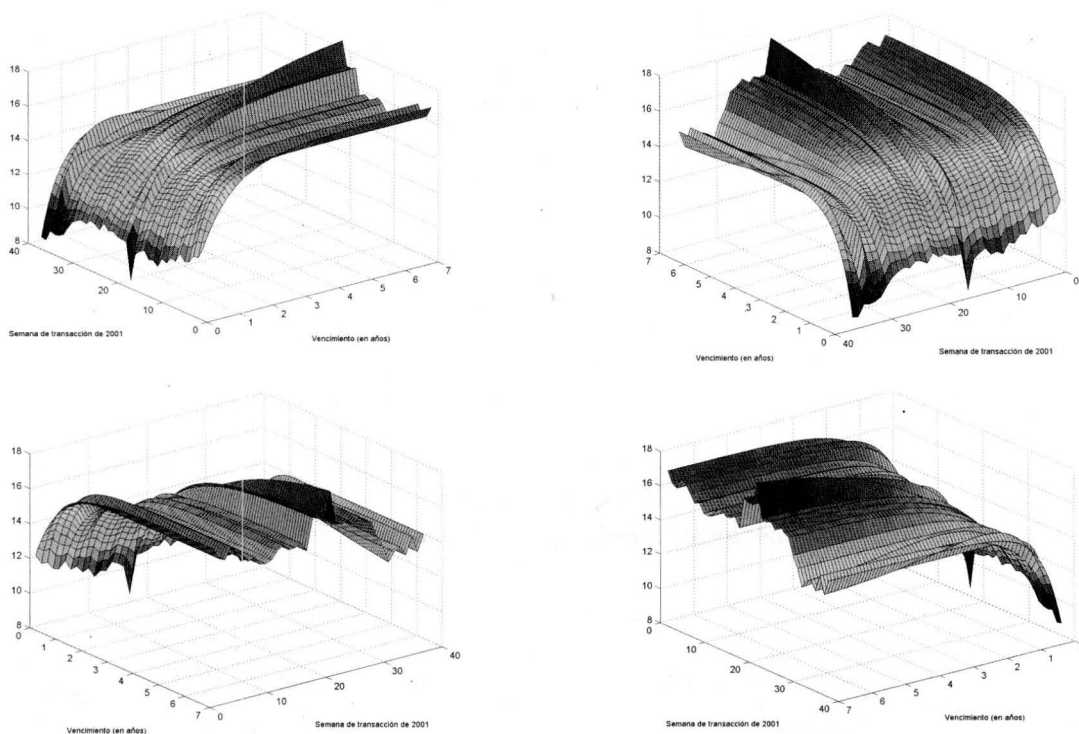
TASA FORWARD

(Metodología de Nelson y Siegel con restricciones)



Fuente: cálculo de los autores.

Gráfico 6
TASA FORWARD
(Metodología de Nelson y Siegel sin restricciones)



Fuente: cálculo de los autores.

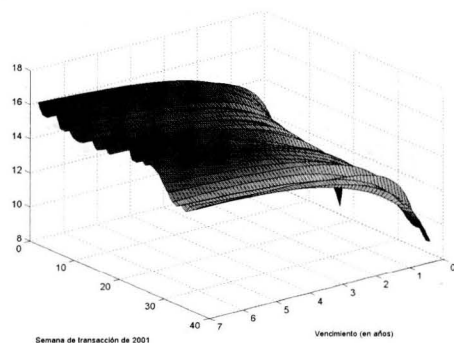
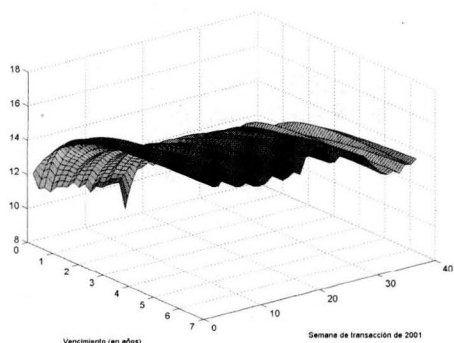
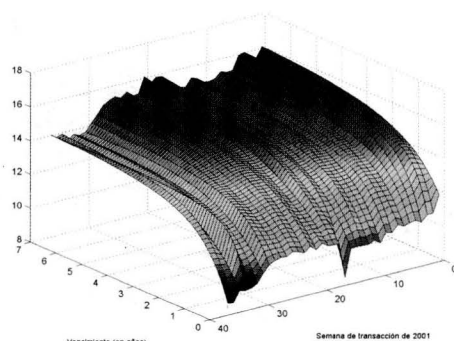
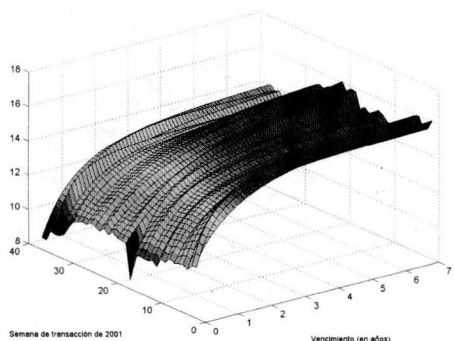
va desde cuatro ángulos diferentes. El panel inferior derecho de cada uno de ellos, permite ver la caída de las tasas de interés en la parte final de la muestra. Sin embargo, se debe tener presente que la *TIB overnight* también disminuyó en las últimas semanas de la muestra como se observa en el Gráfico 9.

En dichos Gráficos (5 a 8), se observa un comportamiento relativamente homogéneo de la estructura a plazo para el año 2001. Sin embargo, se destacan dos hechos importantes que alteran un poco dicha homogeneidad. El primero de ellos tiene que ver con lo acontecido en Argentina y Turquía, en los meses

de mayo y junio de 2001, lo cual motivó recomposiciones de portafolio que elevaron las tasas de largo plazo en relación con las de corto plazo. El segundo está relacionado con la caída considerable en las tasas de la semana 17, correspondiente al 3 de mayo del mismo año. Dicho punto es reflejo del comportamiento de la tasa *overnight* para la fecha.

El valor de la tasa en mayo 3 (8,84% efectiva anual) muestra un descenso considerable con respecto a los niveles registrados los días anteriores, cercanos al 11%, y por debajo de la tasa *repos* y de captaciones a 90 días para los mismos días (Cuadro 1).

Gráfico 7
TASA SPOT
(Metodología de Nelson y Siegel con restricciones)



Fuente: cálculo de los autores.

De acuerdo con la explicación suministrada por la Superintendencia Bancaria, los días 2, 3 y 4 de ma-

Cuadro 1. TASA DE INTERÉS

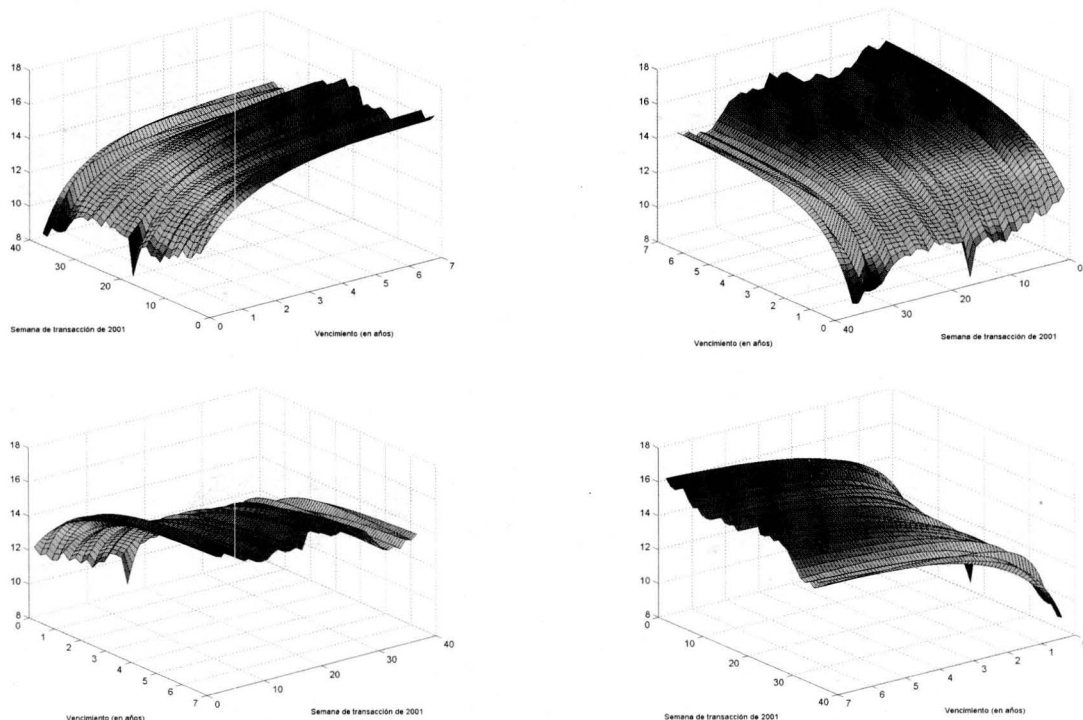
Fecha	<i>Overnight</i>		Captaciones a 90 días
	Interbancaria	Repos	
Abril 30 de 2001	11,14	11,21	12,77
Mayo 2 de 2001	9,94	11,15	11,20
Mayo 3 de 2001	8,84	11,12	11,17
Mayo 4 de 2001	9,40	11,26	11,07

Fuente: cálculos de los autores.

yo se reportaron operaciones por un valor total de \$149,5 mm y una tasa promedio de 5,6%, correspondientes al 30% del mercado para esas fechas, las cuales presionaron la TIB *overnight* a la baja (Cuadro 2). Una de las propiedades que suele tener la curva de rendimientos es la de proporcionar información sobre las expectativas de inflación que se forman los agentes en una economía¹⁷. Sin embargo, para dar dicho uso a la curva se requiere suponer que la tasa

¹⁷ La evolución de la estructura a plazo de las tasas de interés también se asocia con la de la actividad económica (Bernard y Gerlach, 1996).

Gráfico 8
TASA SPOT
(Metodología de Nelson y Siegel sin restricciones)



Fuente: cálculo de los autores.

forward se puede interpretar como la tasa futura *spot* esperada, de manera que tanto el riesgo de liquidez como el sesgo de convexidad son despreciables.

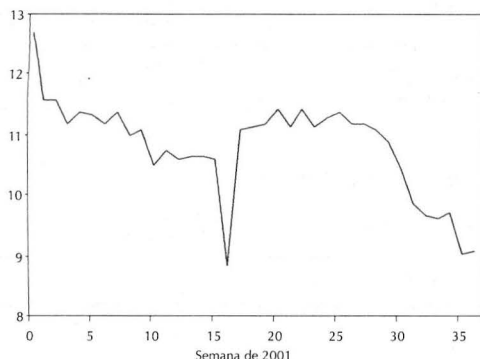
En dicho caso, la tasa *spot* nominal puede ser descompuesta en tasa *spot* real, inflación esperada y prima de riesgo de inflación:

Cuadro 2. OPERACIONES Y TASA

Fecha	Monto parcial	Tasa parcial	Monto total	Tasa total	Participación (%)
Mayo 2 de 2001	55,8	5,6	235,9	9,9	24
Mayo 3 de 2001	46,8	5,7	112,5	8,8	42
Mayo 4 de 2001	46,9	5,7	153,6	9,4	31
Promedio	49,8	5,6	167,3	9,4	30

Fuente: Superintendencia Bancaria y cálculo de los autores.

Gráfico 9. EVOLUCIÓN DE LA TIB OVERNIGHT DURANTE LOS JUEVES DE 2001 (Tasa O/N)



Fuente: cálculo de los autores.

$$S_{nominal} = C + S_{real} + \pi^e$$

Si se supone que la prima de riesgo de inflación es cero, $c = 0$, se cumple la ecuación de Fisher. Para dar este tipo de uso a la información de la curva de rendimientos, se puede suponer que la tasa de interés real es del orden del 7%¹⁸. De esta manera las expectativas de inflación pudieron estar alrededor del 8% durante de la semana 40 de la muestra (octubre de 2001) en tanto que dicha cifra pudo ser un poco mayor al finalizar enero de 2001, mes en el cual las expectativas oscilaban alrededor del 10%¹⁹.

IV. CRITERIOS DE COMPARACIÓN

En esta sección se comparan los resultados de la estimación aplicando la metodología de Nelson y Siegel y la que está en proceso de elaboración por par-

te de la Bolsa de Valores de Colombia, la cual introduce mejoras a la metodología actual que produce la curva CETES. No se incluyen los resultados de la metodología de McCulloch debido a la generación de tasas negativas en el *short-end* de la curva para cerca de la mitad de las fechas consideradas.

Una metodología apropiada para la estimación de curvas de rendimiento debe cumplir las siguientes propiedades: buen ajuste, poca fluctuación, estabilidad de los parámetros e interpretabilidad económica.

Una característica importante de las metodologías utilizadas en este contexto lo constituye la interpretación económica de los resultados. Es así, como para algunas metodologías la forma matemática del modelo contiene información acerca del comportamiento de corto y largo plazo de las tasas de tal forma que los resultados estimados se puedan comparar con los esperados.

Así mismo, un modelo que tenga un buen ajuste debe generar precios o tasas de rendimiento al vencimiento estimadas similares a las observadas. La diferencia entre los valores observados y estimados se pueden medir mediante las estadísticas MAE (promedio de los errores absolutos) y RMSE (raíz cuadrada del promedio de los errores al cuadrado), cuyas expresiones son:

$$MAE(x) = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \hat{x}_i|}{N} \quad RMSE(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2}{N}}$$

Aunque las curvas estimadas deben capturar la dinámica dada por los datos, los movimientos que describen no deben ser muy variables. De acuerdo con Seppälä y Viertiö (1996) un criterio de fluctuación o suavizamiento para la curva *spot* y *forward* es el siguiente:

¹⁸ Se debe recurrir a este tipo de estimaciones dada la ausencia de un mercado de bonos cuya evolución esté atada a la evolución del nivel general de precios. Posada (1998) presenta la evolución de la tasa de interés real a lo largo del siglo pasado.

¹⁹ Otro enfoque para extraer información sobre las expectativas de inflación se encuentra en Schich (1999).

$$\int_0^T [t f''(t)]^2 dt \quad (13)$$

donde $f(t)$ representa la función de la curva *spot* o *forward*.

De acuerdo con el criterio de ajuste promedio, la estimación de precios por el método de Nelson y Siegel es superior a la que viene realizando la Bolsa de Valores de Colombia basada en un ajuste polinomial (ver detalles en el Anexo 3), el cual, en ocasiones, incluye la tasa *overnight*²⁰. Cuando la comparación del criterio del ajuste promedio se hace sobre la estimación de los rendimientos (curva *spot*) el resultado, aunque favorece de nuevo la estimación por el método de Nelson y Siegel, es un poco menos contundente que en el caso de precios. Finalmente, el método de Nelson y Siegel sigue mostrando un mejor desempeño al observar los criterios de suavizamiento (Cuadro 4). En resumen, de acuerdo con los criterios empleados, el Método de Nelson y Siegel parece tener el mejor desempeño.

Cuadro 4. CRITERIOS DE SUAVIZAMIENTO
(Datos semanales de 2001)

Metodología	Curva <i>spot</i>	Curva <i>forward</i>
Nelson y Siegel con <i>overnight</i> , con restricciones	3.810	10.849
Nelson y Siegel con <i>overnight</i> , sin restricciones	3.375	9.698
Bolsa con <i>overnight</i>	13.936	-
Fuente: cálculo de los autores.		

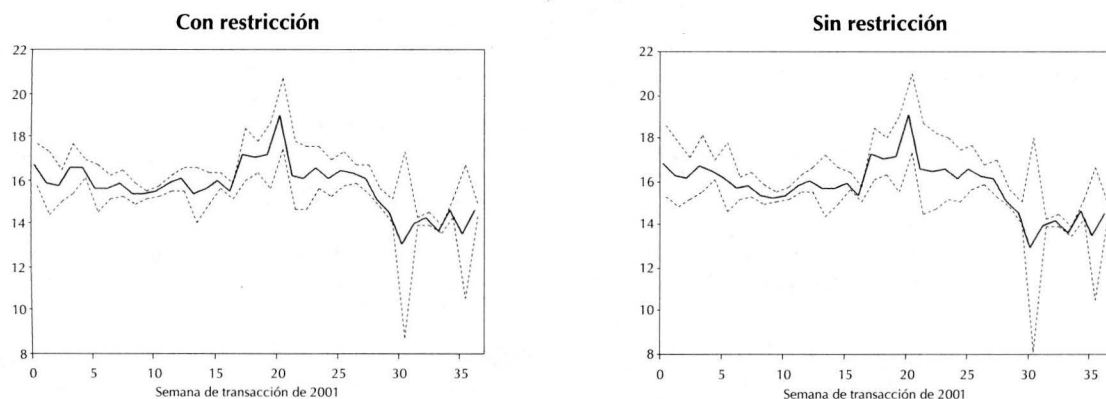
Otra forma de comprobar si un modelo se encuentra bien especificado es observando la estabilidad de los parámetros estimados. Esto se puede lograr comparando las estimaciones de los parámetros del modelo para diferentes fechas de transacción, tal como aparecen en el Gráfico 10. En ambos Gráficos se observa la evolución del parámetro β_0 estimado. Sin embargo, en la primera el valor estimado corresponde al modelo con la restricción de que

Cuadro 3. ESTADÍSTICAS DE AJUSTE PROMEDIO
(Datos semanales de 2001)

Metodología	Precios		Rendimientos	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE
Nelson y Siegel Con <i>overnight</i> , con restricciones	0,345	0,258	0,207	0,160
Nelson y Siegel Con <i>overnight</i> , sin restricciones	0,316	0,235	0,199	0,159
Bolsa de Colombia Con <i>overnight</i>	0,646	0,468	0,319	0,268
Nelson y Siegel Con y sin <i>overnight</i> , sin restricciones	0,251	0,201	0,138	0,115
Bolsa de Colombia Con y sin <i>overnight</i>	0,317	0,249	0,160	0,132
Nelson y Siegel Sin <i>overnight</i> , sin restricciones	0,269	0,217	0,146	0,121

Fuente: cálculos de los autores.

Gráfico 10
ESTABILIDAD DE β_0 EN NELSON - SIEGEL



Fuente: cálculo de los autores.

la curva pase por la tasa *overnight* mientras que en la segunda el valor del parámetro no se estima imponiendo dicha restricción. En los dos Gráficos se observa un comportamiento ligeramente decreciente, a lo largo de 2001, lo cual bajo algunos supuestos podrían interpretarse como una caída en las expectativas de inflación futura para ese año.

Finalmente, es importante anotar que los métodos de estimación polinomiales, como el que utiliza la Bolsa o el de McCulloch tienen el inconveniente

Cuadro 5. COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE LOS MODELOS

Modelo	$f(\infty)$
Nelson y Siegel	Asíntota: β_0
Metodología de la bolsa	$\pm \infty$

Fuente: cálculo de los autores.

²⁰ La Bolsa de Valores decide la inclusión de la tasa *overnight*, utilizando un criterio de fluctuación cuya forma de cálculo aparece en el Anexo 3.

que producen estimaciones no acotadas de la estructura a plazo. El método de Nelson y Siegel, en cambio, como se señala en el Anexo 1 y el Cuadro 5, produce resultados acotados que tienen la posibilidad de ser interpretados económicamente.

V. COMENTARIOS FINALES

Este artículo presenta una estimación de la estructura a plazo de la tasa de interés en Colombia, utilizando los métodos de McCulloch (1971) y Nelson y Siegel (1987), los cuales han sido ampliamente tratados en la literatura. Los resultados sugieren que el segundo método supera las estimaciones que viene realizando la Bolsa de Valores de Colombia, en su propósito de mejorar la actual estimación conocida como CETES. La interpretación de los resultados sugiere una disminución en las expectativas de inflación futura a lo largo de 2001.

Sin embargo, el país no debe contar con un único método de estimación; deben seguirse utilizando otros enfoques para contar con varias estimaciones de una variable tan importante como la estructura a plazo de las tasas de interés para un mercado que se encuentra en franco crecimiento.

BIBLIOGRAFÍA

- Angélica M. Arosemena y Luis E. Arango (2002), Lecturas alternativas de la estructura a plazo: una breve revisión de la literatura, *Borradores de Economía*, No. 223, Banco de la República.
- Bernard, H. y S. Gerlach (1996), Does the term structure predict recessions? The international evidence, *Working Paper* No. 37. BIS.
- Campbell, J. Y., A.W. Lo, and A. C. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press.
- Cultberson, J.M. (1957), The term structure of interest rates, *Quarterly Journal of Economics*, 71, 481-517.
- Fabozzi F.J. (2000), *Bond Markets, Analysis and Strategies*, 4th edition, Prentice Hall, Toronto.
- Lefort, f. Y E. Walker (2000), Caracterización de la estructura de tasas de interés reales en Chile, *Economía Chilena*, Vol 3, 2, 31-52.
- McCulloch, J.H. (1971), Measuring the term structure of interest rates», *Journal of Business*, Vol 44, 19-31.
- McCulloch, J.H. (1975), "The tax-adjusted yield curve", *Journal of Finance*, Vol 30, 811-830.
- Modigliani, F. y R. Sutch (1967), Debt management and the term structure of interest rates: an empirical analysis of recent experience, *Journal of Political Economy*, 75, 569-89.
- Nelson, C.R. y A.F. Siegel, 1987, Parsimonious modelling of yield curves, *Journal of Business*, 60, 473-489.
- Posada, C.E. (1998), La tasa de interés: el caso colombiano del siglo XX (1905- 1997), *Ensayos sobre política económica*, 33, 5-60.
- Salomon Brothers (2000), Understanding the yield curve.
- Sargent, T. (1987), *Dynamic Macroeconomic Theory*, London: Harvard University Press.
- Schich, S.T. (1999), The information content of the German term structure regarding inflation, *Applied Financial Economics*, 9, 385-95.
- Seppälä, J., y P. Viertiö (1996), The term structure of interest rates: estimation and interpretation. *Bank of Finland, Discussion papers*, 19/96.
- Shea, G.S. (1984), Pitfalls in smoothing interest rate term structure data: equilibrium models and spline approximations, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 19, 3, 253-69.
- Shiller, R.J. (1990), The term structure of interest rates, in B.M. Friedman y F.H. Hahn (eds.), *Handbook of Monetary economics*, Elsevier Science Publishers B.V., Volume 1, 627-729.
- Steeley, J. (1991), Estimating the Gilt-Edged term structure: Basis splines and confidence intervals, *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol 18, 513-529.
- Svensson, L.E.O. (1994), Estimating and Interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, NBER Working paper No. 4871.
- Vasicek, O.A. y H.G. Fong (1982), Term structure modelling using exponential splines, *Journal of Finance*, Vol 37, 339-56.

Método de McCulloch (1971)

En esta metodología, la estimación de la estructura de plazo de las tasas de interés para un conjunto de N bonos ordenados en forma creciente de acuerdo con su madurez (m_i), teniendo en cuenta sus tasas cupón (c_i), se lleva a cabo minimizando la suma de errores ponderados cuadráticos de los precios (p_i) de la siguiente forma:

$$\arg \min_a \sum_{i=1}^N (p_i - \hat{p}_i)^2 \quad (1)$$

Suponiendo que cada bono i compromete una corriente continua de pagos cupón con valor facial de 100, el precio se define como:

$$p_i = 100\delta(m_i) + c_i \int_0^{m_i} \delta(m) dm + \varepsilon_i \quad (2)$$

donde m_i es el tiempo de madurez del bono i , ε_i es un término de perturbación aleatorio con $\varepsilon_i \sim iid(0, \sigma^2)$, que recoge todos los factores que explican al precio distintos de la tasa cupón y la función de descuento $\delta(m)^1$, la cual a su vez se define como:

$$\delta(m) = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j f_j(m) \quad (3)$$

donde a_0 es el intercepto, a_j son parámetros desconocidos por estimar ($j = 1, 2, \dots, k$), siendo k el entero más cercano a $N^{1/2}$ y $f_j(m)$ funciones segmentadas-cuadráticas continuas y diferenciables, definidas más adelante, tales que $f_j(0) = 0$. Si se tiene en cuenta que el valor presente del dinero presente es la unidad [$\delta(0) = 1$], entonces la función de descuento adopta la forma:

$$\delta(m) = 1 + \sum_{j=1}^k a_j f_j(m) \quad (4)$$

Sustituyendo la definición de la función de descuento en el modelo del precio como:

$$p_i = 100 + c_i m_i + 100 \sum_{j=1}^k a_j f_j(m_i) + c_i \left[\sum_{j=1}^k a_j \int_0^{m_i} f_j(m) dm \right] + \varepsilon_i \quad (5)$$

y el modelo estimado correspondiente será entonces:

$$\hat{p}_i = 100 + c_i m_i + 100 \sum_{j=1}^k \hat{a}_j f_j(m_i) + c_i \left[\sum_{j=1}^k \hat{a}_j \int_0^{m_i} f_j(m) dm \right] \quad (6)$$

Así, los estimadores ($\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$) de los parámetros desconocidos (a_1, \dots, a_k) pueden ser obtenidos a partir de la regla de mínimos cuadrados ordinarios, de tal forma que minimice la suma de errores al cuadrado dada por la primera ecuación, para lo cual es necesario definir las k funciones que caracterizan a la función de descuento evaluadas al vencimiento del respectivo bono, así como sus integrales evaluadas en el intervalo $(0, m_i)$.

Con tal objetivo McCulloch, propone dividir en el intervalo $(0, m_N)$ en $k-1$ sub-intervalos² (d_j, d_{j+1}) , de tal forma que $d_1 = 0$ y $d_k = m_N$. Así, $\delta(m)$ seguirá una función cuadrática, definida en m_i diferente en cada sub-intervalo. Para obtener continuidad y diferenciableidad, las funciones $f_j(m)$ se definen en subintervalos adyacentes de la forma (d_{j-1}, d_j) y (d_j, d_{j+1}) garantizando un valor y una pendiente en común

¹ Dentro de estos factores McCulloch menciona, entre otros, los costos de transacción, las exenciones de impuestos, la posibilidad de redención del bono en cualquier momento, la elegibilidad como colateral en operaciones crediticias.

² m_N corresponde a la máxima madurez observada en el conjunto de bonos.

en d_j donde $d_j = m_i + \theta(m_{i+1} - m_i)$, con i el entero más grande en $(j - 1)N/k - 1$ y $\theta = [(j - 1)N/k - 1] - i$.

Dados estos sub-intervalos, las funciones $f_j(m)$ se definen de la siguiente forma:

$$f_1(m) = \begin{cases} m - \frac{1}{2d_2} m^2, & 0 - m - d_2 \\ \frac{1}{2} d_2, & d_2 - m - m_N \end{cases} \quad (7)$$

$$f_j(m) = \begin{cases} 0, & 0 - m - d_{j-1} \\ \frac{(m - d_{j-1})^2}{2 (d_j - d_{j-1})}, & d_{j-1} < m - d_j \\ \frac{1}{2} (d_j - d_{j-1}) + (m - d_j) - \frac{(m - d_j)^2}{2 (d_{j+1} - d_j)}, & d_j < m - d_{j+1} \\ \frac{1}{2} (d_{j+1} - d_{j-1}), & d_{j+1} < m - m_N \end{cases} \quad (8)$$

para $j = 2, \dots, k-1$.

$$f_k(m) = \begin{cases} 0, & 0 - m - d_{k-1} \\ \frac{(m - d_{k-1})^2}{2(m_N - d_{k-1})}, & d_{k-1} - m - m_N \end{cases} \quad (9)$$

Método de Nelson y Siegel (1987)

La estimación de la estructura de plazos de las tasas de interés para un conjunto de N bonos, con distintos horizontes de madurez (m_j), rendimientos (r_j) y tasas cupón (c_j), tanto en la metodología de Svensson (1994) como en la de Nelson y Siegel (1987), se lleva a cabo minimizando la suma de errores al cuadrado de los precios (p_j) o de los rendimientos al vencimiento. La estimación de los precios o de los rendimientos difiere de la estimación de un modelo econométrico convencional debido al carácter no lineal y recursivo del método que se describe a continuación.

En el caso de la minimización de los precios, la función objetivo es:

$$\underset{\beta, \tau}{\operatorname{argmin}} = \sum_{j=1}^N (p_j - \hat{p}_j)^2 \quad (10)$$

suponiendo que cada bono j tiene una estructura anual de k_j pagos cupón y un valor facial de 100, el precio estimado del bono, \hat{p}_j , viene dado por:

$$\hat{p}_j = \sum_{k=1}^{k_j} c_j \hat{d}(\tau_{jk}) + 100 \hat{d}(\tau_{jk}) \quad (11)$$

donde $\hat{d}(\tau_{jk})$ denota el factor de descuento para la fecha de pago cupón³ τ_{jk} . Dicho factor se obtiene mediante la expresión:

$$\hat{d}(\tau_{jk}) = \exp \left(- \frac{1}{100} \hat{s}(\tau_{jk}) \tau_{jk} \right) \quad (12)$$

en la anterior ecuación la tasa de interés *spot* (s) es estimada siguiendo a Nelson y Siegel (1987), quienes minimizan el número de parámetros a estimar asumiendo que la tasa a plazo instantánea esté dada por la solución de una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales iguales, de esta forma se tiene:

$$\hat{f}(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp(-m/\tau) + \beta_2 (m/\tau) \exp(-m/\tau) \quad (13)$$

donde τ es una constante (positiva) de tiempo asociada con la ecuación y β_0 (positivo), β_1 , y β_2 son los parámetros restantes del modelo. Estos cuatro parámetros deben ser estimados diariamente.

La ecuación anterior genera una familia de curvas que pueden ser encorvadas, en forma de "U" o de "S", dependiendo de los valores de β_1 y β_2 ; además, tienden a β_0 en forma asintótica.

³ En forma general, se tiene que: $\tau_{jk} = m_j \cdot \text{piso}(m_j) + k-1$ y $k_j = \text{piso}(m_j) + 1$.

Como se observa en la expresión (13), la tasa a plazo tiene tres componentes: la constante β_0 , el término exponencial $\beta_1 \exp(-m/\tau)$, el cual tiende a cero en forma monótona cuando β_1 es positivo, y el término $\beta_2 m/\tau \exp(-m/\tau)$, que señala la forma que tendrá la curva. Por ejemplo, tendrá forma de U si β_2 es negativo. Estos tres componentes se asocian al nivel, la inclinación y la curvatura del ajuste, respectivamente.

Bajo la forma funcional de Nelson y Siegel (1987), las tasas *spot* y a plazo se aproximan a una constante tanto en el corto como en el largo plazo.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} s(m) = \beta_0 \quad (14a)$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} f(m) = \lim_{m \rightarrow 0} s(m) = \beta_0 + \beta_1 \quad (14b)$$

Teniendo en cuenta que según la ecuación (5):

$$s(m) = \frac{1}{m} \int_{t=0}^m f(t) dt \quad (15)$$

la expresión de las tasas *spot* es la siguiente:

$$s(m) = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{1 - \exp(-m/\tau)}{m/\tau} - \beta_2 \exp(-m/\tau) \quad (16)$$

La segunda estrategia de estimación consiste en minimizar los errores cuadráticos de los rendimientos a la madurez, es decir:

$$\underset{\beta, \tau}{\operatorname{argmin}} = \sum_{j=1}^N (y_j - \hat{y}_j)^2 \quad (17)$$

La estimación de los rendimientos al vencimiento (y_j) se realiza siguiendo los pasos de la metodología descrita anteriormente. Una vez obtenida la estimación del precio, se calcula el rendimiento estimado utilizando la definición de rendimientos dada por la solución de la ecuación:

$$\hat{p}_j(m) = \sum_{k=1}^m c_j \exp[-1/100 \hat{y}_j(m)k] + 100 \exp[-1/100 \hat{y}_j(m)k] \quad (18)$$

teniendo en cuenta que la anterior ecuación es no lineal, dado el precio, los rendimientos son estimados utilizando métodos numéricos.

Anexo 2. ALGUNOS ASPECTOS GENERALES DE LOS TÍTULOS¹

La información utilizada para la construcción de la curva de rendimientos se toma de los precios del mercado secundario para los bonos de riesgo de emisión soberano que se transan en el mercado local de capitales.

Para construir una curva de rendimientos que sea utilizada como indicador líder del comportamiento de las tasas de mercado suele recurrirse al precio de los instrumentos con el menor riesgo emisor. Tradicionalmente, se ha considerado que las obligaciones que cumplen esta característica son las de emisores soberanos.

La República de Colombia emite en el mercado local de capitales, varios tipos de títulos. Sin embargo, el principal instrumento de financiación del presupuesto, después de los impuestos, son los Títulos de Tesorería TES Clase B, los cuales tienen las siguientes características:

- Están denominados en pesos (COP), dólares y unidades de valor real constante - UVR.
- El principal se amortiza al final de plazo (*bullet*).
- Las emisiones son por lo general de COP\$ 500mm.
- No pueden ser redimidos antes de su vencimiento.
- Pagan intereses anualmente. Esta tasa corresponde a la tasa efectiva anual pagada por la Nación (un cupón para los TES de 1 año, dos cupones

para los de dos años, etc.) dependiendo de las condiciones financieras de cada título.

- Existen TES de tasa fija y de tasa variable o indexados. Los TES de tasa fija pagan un cupón de intereses fijo durante su vigencia, que es anunciada previamente por el emisor. Los TES de tasa fija son denominados en pesos, dólares y UVR. En el caso de los dos últimos, los títulos pueden obtener una ganancia adicional al rendimiento en su respectiva denominación, como resultado del diferencial en cambio con respecto al peso. Los TES de tasa variable o indexados (denominados en pesos) pagan una tasa de interés compuesta que corresponde al IPC de los doce meses anteriores al pago de los intereses mas un margen efectivo que se define cuando se realiza la emisión de los títulos.
- Son emitidos con plazos de vencimiento de 1, 2, 3, 5, 7, 10 y 15 años.
- Son títulos emitidos a la orden y son libremente negociables en el mercado secundario.
- Son administrados por el Depósito Central de Valores del Banco de la República.
- Se emiten de forma desmaterializada. Es decir, existen como un registro en el Depósito Central de Valores.
- Son fungibles. Es decir, que una misma emisión podrá reunirse en un solo título que los reemplaza con el objeto de homogeneizar un volumen importante de títulos.
- La fecha de emisión de un título es la fecha en la que el Ministerio de Hacienda y Crédito Público (MHCP) pone en circulación el título específico.

¹ Esta sección se basa en un documento preparado por Silvia Juliana Mera.

Mercado secundario

El Ministerio de Hacienda y Crédito Público hace emisiones de títulos en volúmenes de aproximadamente \$500 mm con una única fecha y con condiciones financieras idénticas. El objetivo de hacer emisiones de volúmenes grandes es poder dar liquidez a los títulos en el mercado secundario, ya que mientras mayor sea el monto de emisión mayores serán los tenedores de dichos bonos y por tanto, el nivel de negociación también será mayor. No obstante, el hecho que el MHCP emita los títulos en una fecha específica, no significa que ese mismo día sean colocados.

La colocación de los títulos se hace en subastas periódicas de fracciones de la emisión hasta agotarla. Por esto, el MHCP realiza subastas de colocación primaria de TES B, en las que únicamente participan las entidades participantes en el Pro-

grama de Creadores y Aspirantes a Creadores de Mercado.

Los Aspirantes y Creadores de Mercado son las entidades encargadas de negociar y distribuir el papel al resto del mercado. Ellos negocian a través de sistemas electrónicos o en el Mercado Sobre el Mostrador², es decir, negociación directa entre entidades³.

Datos utilizados para la estimación de la curva de rendimientos

Los datos utilizados para el cálculo de la curva de rendimientos fueron la tasa *overnight* y las tasas de negociación de los TES Clase B registradas en el SEN para las fechas seleccionadas. La tasa *overnight* corresponde a la tasa de captación (pasiva) de los Bancos a un año, suministrada por la Superintendencia Bancaria. Existen en total 133 emisiones de TES Clase B distribuidas de la siguiente manera:

Tipo de título	Número de emisiones en circulación	Fecha de emisión al vencimiento más cercana	Fecha de emisión al vencimiento más lejana
Tasa fija pesos	22	Julio 27 de 01	Mayo 2 de 2006
Tasa variable pesos	99	Septiembre 5 de 2001	Mayo 27 de 2013
Tasa fija dólares	6	Septiembre 13 de 2001	Julio 25 de 2006
Tasa fija UVR	6	mayo 25 de 2004	Enero 22 de 2008
Total	133		

² El "mercado sobre el mostrador" (over the counter), se conoce también por su sigla en inglés: OTC.

³ En Colombia existen dos sistemas de negociación de TES B: el Sistema Electrónico de Negociación (SEN), administrado por el Banco de la República y la Bolsa de Colombia.

Anexo 3. PROCEDIMIENTOS PARA ESTIMAR LA CURVA DE RENDIMIENTO CERO - CUPÓN DE LA BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA¹

Suponga que en una fecha específica hay N bonos. Para el j -ésimo bono se conoce el vector $[y_j, c_j, t_j]$, donde y_j es el *yield*, c_j la tasa cupón y t_j la fecha de vencimiento.

Se define τ_{jk} con $k = 1, 2, \dots, n_j$ como el período de vencimiento anualizado del cupón k del bono j , donde n_j el numero de cupones del bono j . Por lo tanto, el precio observado (p_j) del bono j es:

$$p_j = \sum_{k=1}^{n_j} c_j \frac{1}{(1 + y_j)^{\tau_{jk}}} + \frac{100}{(1 + y_j)^{t_j}} \quad (1)$$

La función de descuento a estimar esta dada por el siguiente polinomio de cuarto grado:

$$d(t) = 1 - \beta_0 t - \beta_1 t^2 - \beta_2 t^3 - \beta_3 t^4 \quad (2)$$

entonces el precio estimado del bono j (\hat{p}_j) se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{p}_j = \left(\sum_{k=1}^{n_j} c_j \cdot \hat{d}(\tau_{jk}) \right) + \left(100 \cdot \hat{d}(t_j) \right) \quad (3)$$

Los parámetros se estiman utilizando el método de mínimos cuadrados:

$$\min_{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3} \sum_{j=1}^N (p_j - \hat{p}_j)^2 \cdot w_j \quad (4)$$

sujeto a:

$$\left. \frac{\partial d(t)}{\partial t} \right|_{t=T1} = 1.5 \cdot \left(\left. \frac{\partial d(t)}{\partial t} \right|_{t=T2} \right) \quad (5)$$

donde $T1$ es el máximo plazo anualizado de estimación para la curva y $T2 = T1/2$ (por ejemplo, $T1 = 7$ significa que la curva de rendimientos se esta calculando para un plazo de 7 años).

Esta restricción se utiliza para suavizar la curva de rendimientos en el máximo plazo de maduración. El factor de ponderación de la función objetivo se define como $w_j = (1/D_j)^2$, donde D_j es la duración modificada del bono j , definida como:

$$D_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} v p_i \cdot t_i}{p_j \cdot (1 + y_j)} \quad (6)$$

donde $v p_i$ es el valor presente del flujo de caja del bono j correspondiente al tiempo t_i .

Para cada fecha de transacción se observan N transacciones, de las cuales $N-1$ corresponden a *TES* y una transacción interbancaria *overnight*. Esta última se adiciona con el objetivo de capturar la dinámica de corto plazo y dar mayor estabilidad al "short end" de la curva caracterizado por la falta de liquidez.

Para decidir sobre la inclusión de dato de la *TIB* de un día calculada por la Superintendencia Bancaria, se escoge la curva estimada que haya presentado la menor fluctuación. El indicador de la fluctuación (*if*) utilizado es el siguiente:

$$if = \sum_i [(s''(t_i)) \cdot t_i]^2 \quad (7)$$

Donde $s''(t_i)$ es la segunda derivada de la función estimada para la curva *spot*, evaluada en el tiempo t_i .

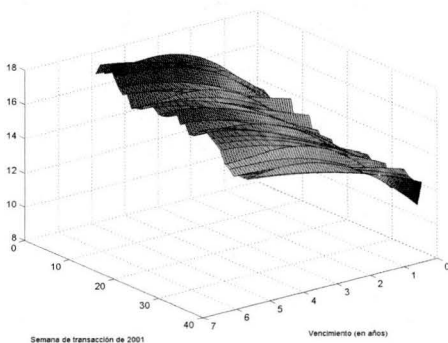
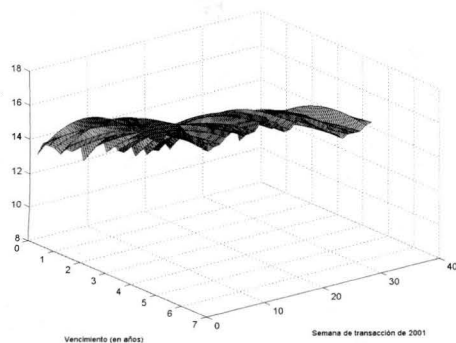
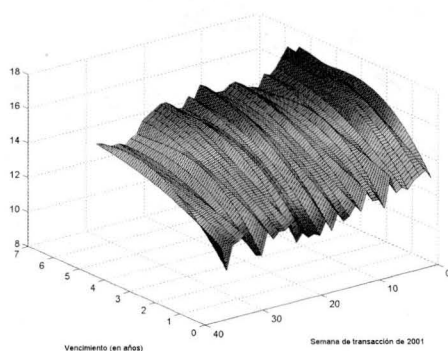
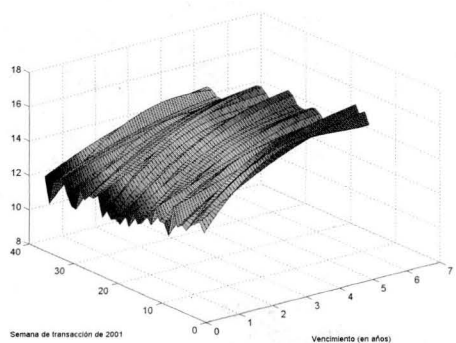
Los resultados de esta metodología se presentan en el Gráfico 1. Adicionalmente, con el objetivo de

¹ Este procedimiento es una modificación de la metodología actual que esta siendo estudiada por la Bolsa de Valores de Colombia. Esta síntesis ha sido preparada por Camilo Santos para dicha institución.

comparar esta metodología con la de Nelson y Siegel (Gráficos 7 y 8), se realizó un ejercicio donde

siempre se incluye la tasa *overnight*². Los resultados con esta modificación aparecen en el Gráfico 2.

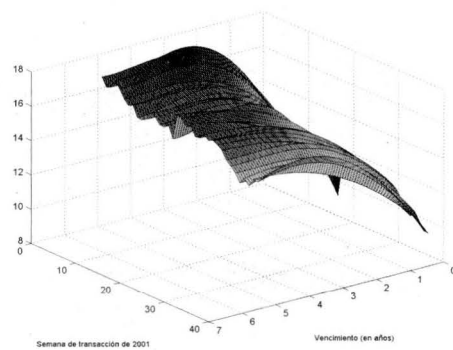
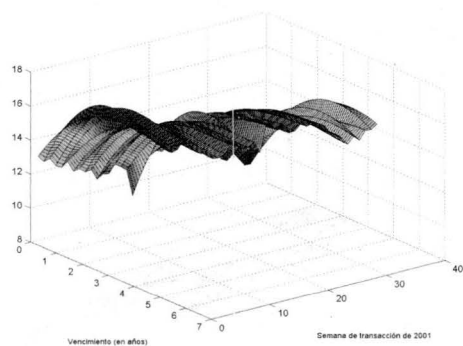
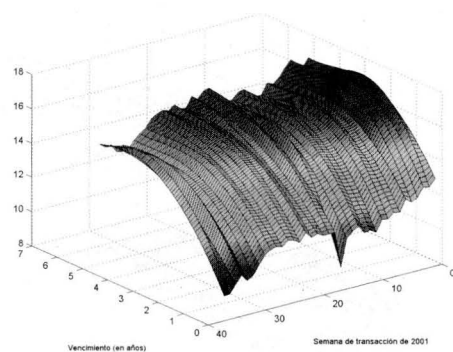
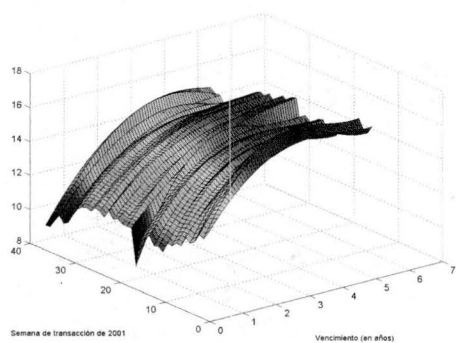
Gráfico 1. CURVA SPOT DURANTE 2001
(según metodología de la Bolsa de Valores de Colombia)



Fuente: cálculo de los autores.

² Y, por lo tanto, no se utiliza el indicador de fluctuación.

**Gráfico 2. CURVA *SPOT* DURANTE 2001
(Incluyendo la tasa *overnight*)**



Fuente: cálculo de los autores.