

TRIMESTRALIZACION DEL PRODUCTO INTERNO BRUTO EN COLOMBIA*

*Mauricio Carrizosa
Germán Botero*

Diversas razones justifican la conveniencia de contar con indicadores trimestrales de la actividad económica. Pueden señalarse por lo menos tres de ellas. En primer término, la información de corto plazo obviamente permite un seguimiento más frecuente de la evolución de la actividad económica, lo cual es conveniente para la formulación de la política económica y empresarial, al poder precisarse mejor los momentos en que ocurren cambios en el ritmo de la producción. En segundo término, la información trimestral es también más oportuna. Usualmente, los indicadores de corto plazo están disponibles antes que los indicadores que sirven de base para los cálculos anuales definitivos de producción, de suerte que los primeros pueden permitir una evaluación más rápida del desempeño sectorial y global. Finalmente, la disponibilidad de estimativos trimestrales amplía significativamente el acopio de información para desarrollar análisis económicos. Con datos trimestrales se puede, por ejemplo, establecer con mayor precisión la longitud

de los retardos que supuestamente existen entre las políticas macroeconómicas y la producción y los precios.

Dos problemas fundamentales corresponde abordar cuando se trata de trimestralizar la actividad económica. En primer término, se debe emplear un análisis de regresión para vincular los valores anuales del PIB a indicadores disponibles trimestralmente. En segundo término, corresponde definir un procedimiento para distribuir el error que emerge entre las cifras obtenidas a partir de las ecuaciones estimadas, y los datos anuales originales. El objetivo principal de este trabajo es la definición correcta de este procedimiento.

I. INTENTOS ANTERIORES DE TRIMESTRALIZACION

En el pasado, ya se han realizado algunos intentos de trimestralización. A finales de los años sesenta, Alberto Musalem practicó el procedimiento sencillo de interpolar el PIB trimestral mediante una regresión lineal del PIB anual en función del consumo de energía para uso industrial¹. Los valores trimestrales obtenidos aparecen

* Resumen de la metodología propuesta en el estudio "Trimestralización del Producto Interno Bruto de Colombia", preparado por Mauricio Carrizosa Serrano, con la asistencia de Sergio Calderón Acebedo, y encargado por el Departamento Nacional de Planeación.

¹ Musalem (1971), pp. 38 y 145.

temente se ajustaron multiplicando por el cociente del PIB anual al promedio de los citados valores. El estudio sólo emplea un indicador para el PIB agregado, lo cual conlleva dos limitaciones importantes. De una parte, puede suponerse que la actividad económica de algunos sectores (e. g. servicios financieros) no fluctúa de acuerdo con el consumo de energía eléctrica, de suerte que la sencillez del método puede tener un costo importante en términos de la precisión de los estimativos históricos y de las proyecciones futuras. De otra parte, y por la misma razón, el uso de un solo indicador no da para confeccionar estimativos desagregados de la actividad trimestral.

A mediados de los años sesenta se desarrolló una estimación del PIB trimestral para el período 1967-1973, en la cual se emplearon diversos indicadores que permitirían además presentar estimativos sectoriales². Son cuatro los problemas fundamentales de las ecuaciones presentadas: primero, las estadísticas *t* de los coeficientes son muy bajas; segundo, el empleo de un alto número de indicadores simultáneamente tiene un oscuro sentido económico; tercero, se destaca el uso frecuente de la variable tiempo, la cual no tiene por qué tener una relación constante con la actividad económica de ningún sector; finalmente, debido a restricciones en los datos, para trimestralizar el sector agropecuario se consideran iguales las producciones en los dos primeros y dos últimos trimestres.

La baja significancia de los coeficientes obtenidos con un análisis multivariado obedece, en buena parte, a la multicolinealidad existente entre los indicadores. Ante este problema, es frecuente hallar diversas combinaciones lineales de indicadores que, siendo mutuamente ortogonales, expliquen la mayoría de la varianza de los indicadores originales. Así, el primer componente principal es aquella combinación lineal de indicadores que explica la mayor parte posible de la varianza de éstos; el segundo compo-

nente principal es aquella combinación lineal que le sigue al primero en poder explicativo de la varianza de los instrumentos seleccionados, etc. Una vez calculados los componentes principales se practica un análisis de regresión entre la variable que se desea trimestralizar y los primeros componentes principales de los indicadores trimestrales escogidos. La ecuación de regresión obtenida se emplea luego para aproximar el comportamiento trimestral de la citada variable. Este fue el enfoque adoptado en los más recientes intentos de trimestralización del PIB en su conjunto³. Su principal defecto es evidente: una combinación lineal de indicadores más o menos arbitrariamente escogidos no tiene un significado económico claro.

El objetivo de este informe de investigación es presentar la metodología utilizada por FEDESARROLLO y la Sociedad Fiduciaria Bermúdez y Valenzuela S.A. para calcular indicadores trimestrales de actividad económica. La siguiente sección expone las principales metodologías disponibles para distribuir el error que emerge entre cifras obtenidas a partir de ecuaciones estimadas, y los datos originales anuales; la tercera resume la metodología empleada, y la última sección presenta resultados preliminares para el sector industrial, y los resultados de sumar los valores trimestralizados (preliminares) de todos los sectores.

II. METODOLOGIAS DISPONIBLES

a. Breve reseña de los enfoques existentes

La manera más rudimentaria de distribuir el error anual es dividirlo por cuatro o distribuirlo proporcionalmente según el valor del estimativo trimestral que brinde la ecuación de regresión. El problema de este procedimiento es que arroja una discontinuidad o "salto" entre el estimativo corregido del último trimestre de cada año y el correspondiente al primer trimestre del año siguiente. En efecto, si se distribuye equitativa o proporcionalmente el error anual, el

² Documento sin identificación de autor o fecha de publicación.

³ Silva y Ramírez (1979) y Cardozo (1982).

cambio de este error de un año a otro queda identificado, en la serie trimestral, entre los dos trimestres mencionados. Los enfoques adoptados para solucionar esta discontinuidad parten de algún supuesto sobre la forma como se comporta el error trimestral o un componente estadístico de éste. A continuación se reseñan estos enfoques de manera breve.

Hace ya dos décadas J.H.C. Lisman y J. Sandee⁴, idearon un procedimiento matemático para obtener cifras trimestrales, cuando no se sabe nada sobre estas cifras, excepto que suman al total anual. El supuesto esencial es que "las cifras trimestrales están ubicadas sobre una tendencia no irregular"⁵. Específicamente se supone que cada cifra trimestral del año t es un promedio ponderado, con un conjunto de ponderaciones diferentes para cada trimestre, aplicable a las observaciones anuales conocidas correspondientes a los años $(t-1)$, t y $(t+1)$. Para definir estas ponderaciones se hacen los siguientes supuestos. En primer término, las ponderaciones son simétricas; es decir, si $x(t, i)$ es el valor del trimestre i en el año y , $y(t)$ es la observación anual correspondiente al año t , y (a, b, c, d, e, f) es un conjunto de ponderaciones, se propone la ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} x(t, 1) \\ x(t, 2) \\ x(t, 3) \\ x(t, 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & e & d \\ b & f & c \\ c & f & b \\ d & e & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix}$$

Ahí se aprecia la simetría que presentan las ponderaciones de los trimestres 1 y 4 por una parte, y 2 y 3 por otra. En segundo término, se supone que cuando la serie anual está descrita por una pura tendencia lineal, o sea, donde el crecimiento de año a año es constante, la serie trimestral también enseñaría esta misma característica, con un crecimiento trimestral obviamente igual a la cuarta parte del crecimiento anual. Finalmente si el comportamiento de la serie anual es alternado o sea que los va-

lores anuales sucesivamente bajan y suben en una magnitud fija y sin ninguna tendencia, entonces la serie trimestral está descrita por una función sinusoidal, cuya amplitud es función de la diferencia constante entre los valores anuales sucesivos. Con estos supuestos, puede obtenerse una matriz de ponderaciones fija para cualquier situación. Se trata entonces de un procedimiento matemático ingenioso, obtenido a partir de supuestos razonables pero, desde luego, arbitrarios. Aparte de esta arbitrariedad, la propuesta de Lisman y Sandee presenta las limitaciones obvias, desde el punto de vista práctico, de no brindar estimativos para los años extremos ni de permitir procedimiento alguno para la extrapolación por fuera del período para el cual se cuenta con observaciones anuales.

Otro procedimiento enteramente matemático consiste en hallar aquel conjunto de valores trimestrales tal que la suma de los cuadrados de sus primeras o segundas diferencias sea mínimo con la restricción que iguala la suma de cada grupo sucesivo de cuatro trimestres a la observación anual correspondiente. Víctor A. Ginsburgh⁶ propone emplear este procedimiento matemático como una primera etapa para calcular los valores de tendencia trimestrales de la serie que se desea trimestralizar (variable objetivo) y de la variable relacionada. En una segunda etapa, se calcula una ecuación de regresión anual de la variable objetivo en función de la variable relacionada. El coeficiente estimado de la variable relacionada se multiplica, en la tercera etapa, por la diferencia entre el valor observado trimestral y el valor de tendencia trimestral de la variable relacionada estimado en la primera etapa para calcular la diferencia correspondiente de la variable objetivo, la cual luego se suma a su propia tendencia también calculada en la primera etapa.

Un enfoque algo diferente estima la serie trimestral en una sola etapa, acudiendo siempre a un modelo estrictamente estadístico, y dirigiendo la atención hacia la ade-

⁴ Lisman y Sandee (1964).

⁵ Lisman y Sandee, *op cit*, pg. 87.

⁶ Ginsburgh (1973).

cuada especificación de este modelo, particularmente en cuanto hace a la estructura de errores de las ecuaciones estadísticas. Este enfoque fue propuesto inicialmente por Gregory C. Chow y An-Loh-Lin, y su procedimiento consiste esencialmente en hallar el mejor estimador lineal insesgado que convierta el vector de datos anuales a datos trimestrales, teniendo en cuenta la información contenida en la(s) variable(s) relacionada(s)⁷. Por su parte, Roque B. Fernández desarrolló este procedimiento para el caso en el cual los errores de la ecuación estadística de la variable objetivo en función de la o las variables relacionadas siguen el proceso estocástico llamado "paseo aleatorio", el cual postula sencillamente que el error del trimestre t es igual a la suma del error del trimestre $(t-1)$ y una perturbación estocástica de media cero y varianza constante⁸.

La única evidencia disponible sobre la bondad relativa de los anteriores procedimientos concluye, como habría de esperarse, que los que siguen las etapas de distribuir matemáticamente la tendencia y luego de distribuir estadísticamente la diferencia respecto a la tendencia con la ayuda de series relacionadas, son mejores que aquellos que emplean un método exclusivamente matemático. No hay estudios que permitan comparar la bondad relativa de procedimientos parcialmente "matemáticos" como el de Ginsburgh, frente a aquellos que, como el de Fernández, se originan en un modelo enteramente estadístico. En principio, parecería acertado optar por estos últimos ya que permiten extrapolaciones trimestrales correspondientes a períodos que todavía no cuentan con un estimativo anual bien sea por no haber concluido el año, o por no haberse reunido la información más completa que suele respaldar a los estimativos anuales. Los procedimientos matemáticos mencionados no pueden por sí solos extrapolar la tendencia, puesto que descansan en la disponibilidad de totales anuales. Por ejemplo,

si se desea un estimativo de la tendencia en el año en curso, el método de interpolación por minimización de diferencias exige conocer el total anual del año en curso, y el método de interpolación por línea recta demanda establecer el valor del total anual correspondiente al año entrante. Sin embargo, se apreciará más adelante que es posible emplear el método de Ginsburgh para extrapolar, acudiendo a la información sobre el comportamiento del error de la regresión aplicada a cifras anuales. Este método resulta a la postre más satisfactorio que el enfoque de Chow-Lin y Fernández, pues este último arroja un resultado preocupante.

b. Los modelos de G.C. Chow y A. Lin, y de Ginsburgh⁹.

Chow y Lin construyeron un estimador no-sesgado y de mínima varianza para una variable de "alta frecuencia", con base en sus valores de baja frecuencia y su relación con las variables relacionadas. A continuación se presenta un resumen de esta metodología.

Sea "k" el número de intervalos en que se quiere dividir la serie original, "m" el número de valores disponibles de esa serie, y "n" el número de elementos del vector que se quiere encontrar ($n = m.k$). Definiendo a Y como la serie original ($m \times 1$), a X como la serie buscada ($n \times 1$) y a Z como una matriz de variables exógenas ($n \times q$), Chow y Lin plantean la existencia de una relación estocástica entre X y Z. Es decir:

$$X = Z\beta + u$$

donde:

u; es un vector de errores de media cero y matriz varianza covarianza V.

Un estimador lineal de X es de la forma $\hat{X} = AY$ donde A es una matriz de pará-

⁷ Chow y Lin (1971).

⁸ Fernández (1981).

⁹ El lector es referido a los artículos originales para una explicación detallada de estos métodos.

metros. Para que tal estimador sea insesgado se necesita que su valor esperado sea igual a X. Por lo tanto, se necesita que:

$$A B' Z - Z = O \quad (2)$$

donde B es una matriz tal que $Y = B' X$.

Para que \hat{X} sea de máxima eficiencia, simplemente se minimiza con respecto a A la traza de la matriz de covarianza de $\hat{X} - X$. Si a esta minimización se impone la ecuación (2) como restricción, se obtiene un estimador no sesgado de máxima eficiencia.

La matriz de covarianza de $(\hat{X} - X)$ es igual a:

$$\text{Cov}(\hat{X} - X) = A B' V A B - V A' B - A B' V + V \quad (3)$$

y la minimización con respecto a A de su traza sujeta a la restricción (2) implica,

$$\hat{X} = Z \hat{\beta} + V B (B' V B)^{-1} (Y - B' Z \hat{\beta}) \quad (4)$$

$$\hat{\beta} = [Z' B (B' V B)^{-1} B' Z]^{-1} +$$

$$Z' B (B' V B)^{-1} Y \quad (5)$$

Una propiedad de \hat{X} debe ser que su suma sobre un mismo año sea igual a Y. Utilizando (4) se comprueba fácilmente que $B' \hat{X}$ es, en efecto, igual al vector Y.

En resumen, las ecuaciones (4) y (5) dicen que el estimador insesgado más eficiente se construye estimando $\hat{\beta}$ por mínimos cuadrados generalizados (ecuación (5), y construyendo luego el vector \hat{X} con base en la relación (1) y distribuyendo los errores $(Y - B' Z \hat{\beta})$ con base en una matriz de ponderación $V B (B' V B)^{-1}$. Esta matriz depende de la matriz de varianzas covarianza de los errores de la ecuación 1.

Chow y Lin concluyen su trabajo insinuando cómo se puede obtener un estimador consistente de la matriz V, suponiendo un proceso autorregresivo de primer orden.

La "desventaja" de este método se aprecia fácilmente utilizando un ejemplo: El Cuadro 1 presenta las matrices de ponderación de errores correspondientes a varios valores del coeficiente de autocorrelación (ρ)¹⁰. Se observa que si $\rho = 0$, el error anual simplemente se divide por 4, mientras que a medida que ρ crece la discontinuidad en la corrección disminuye. El gráfico 1 muestra los coeficientes de ponderación del segundo año para valores de ρ desde 0 hasta 0.99. Se observa cómo la discontinuidad, o "salto", que aparece con $\rho = 0$, es inexistente para $\rho = 0.99$.

Con base en esta observación y debido a dificultades computacionales en la estimación de ρ , R. Fernández propuso suponer $\rho = 1$ (hipótesis de paseo aleatorio). El supuesto tiene la evidente ventaja de suavizar al máximo la distribución de los errores, y la desventaja de asumir a-priori un valor para el coeficiente de autocorrelación que hubiera podido ser estimado. Lo interesante, sin embargo, es que asumir $\rho = 1$ para efectos de calcular la matriz de ponderación de errores $(V B (B' V B)^{-1})$ es equivalente a la forma como se distribuyen los errores en la metodología de Gimsburgh.

Como se dijo antes, el método de Gimsburgh consta de tres etapas. En la primera etapa se calculan matemáticamente valores trimestrales tanto para X como para Z, minimizando la suma de los cuadrados de sus primeras diferencias bajo la restricción de que la suma —durante un mismo año— de los valores calculados sea igual al valor anual observado. Matemáticamente,

$$\text{Min } \bar{X}' \cdot M \cdot \bar{X} \quad (6)$$

$$\bar{X}$$

$$\text{sujeto a: } B' \bar{X} = Y$$

Donde $M = D'D$ y $D\bar{X}$ es el vector de primeras diferencias de \bar{X} .

La solución a este problema está dada por:

¹⁰ Este ejemplo correspondería a la trimestralización de tres años.

CUADRO No. 1

**MATRICES DE DISTRIBUCION DE ERRORES ANUALES,
PARA VARIOS VALORES DE ζ**

$\zeta = 0$			$\zeta = 0,4$		
0,25	0,00	0,00	0,23	0,03	0,00
0,25	0,00	0,00	0,28	0,03	0,00
0,25	0,00	0,00	0,27	0,00	0,00
0,25	0,00	0,00	0,22	0,06	0,01
0,00	0,25	0,00	0,06	0,22	0,03
0,00	0,25	0,00	0,00	0,28	0,03
0,00	0,25	0,00	0,03	0,28	0,00
0,00	0,25	0,00	0,03	0,22	0,06
0,00	0,00	0,25	0,01	0,06	0,22
0,00	0,00	0,25	0,00	0,00	0,27
0,00	0,00	0,25	0,00	0,03	0,28
0,00	0,00	0,25	0,00	0,03	0,23
$\zeta = 0,95$			$\zeta = 0,99$		
0,30	0,07	0,01	0,31	0,07	0,01
0,29	0,04	0,01	0,29	0,04	0,01
0,24	0,01	0,00	0,24	0,01	0,00
0,17	0,10	0,02	0,17	0,10	0,02
0,07	0,22	0,04	0,07	0,22	0,04
0,00	0,28	0,03	0,00	0,28	0,03
0,03	0,28	0,00	0,03	0,28	0,00
0,04	0,22	0,07	0,04	0,22	0,07
0,02	0,10	0,17	0,02	0,10	0,17
0,00	0,01	0,24	0,00	0,01	0,24
0,01	0,04	0,29	0,01	0,04	0,29
0,01	0,07	0,30	0,01	0,07	0,31

$$\begin{bmatrix} X \\ \lambda_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & B \\ B' & O \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} O \\ Y \end{bmatrix}$$

y por una ecuación similar para Z (reemplazando \bar{X} por \bar{Z} y Y por $B'Z$).

La segunda etapa calcula un vector de coeficientes tal que:

$$Y = B'Z\beta + u$$

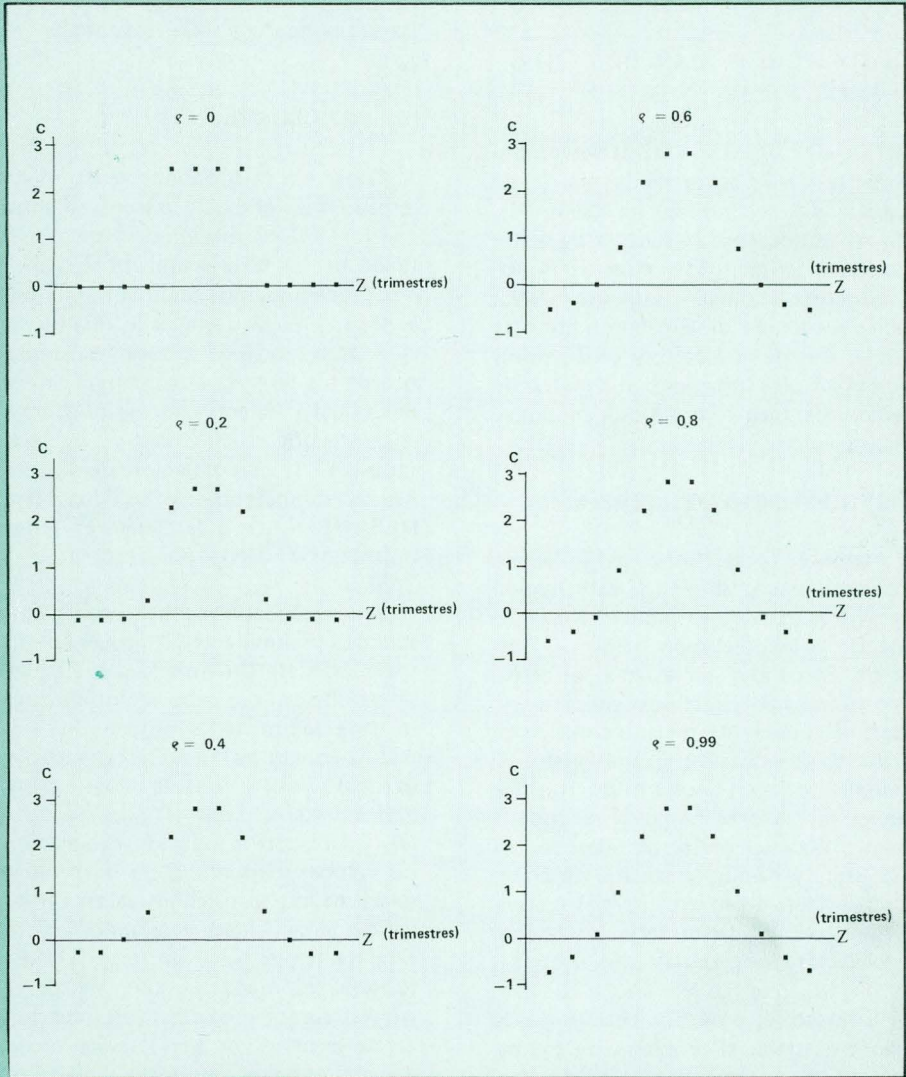
Y la tercera etapa calcula los valores de X de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} X \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ \lambda_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z - \bar{Z} \\ -\lambda_z \end{bmatrix} \hat{\beta} \quad (9)$$

Es decir, a los valores interpolados matemáticamente se suman los efectos de la diferencia entre el valor observado trimestralmente, Z, y el valor de tendencia \bar{Z} de la misma variable.

Para explicar el sentido de este procedimiento, Ginsburgh premultiplica la ecuación (9) por

GRAFICO 1
 COEFICIENTES DE PONDERACION DE ERRORES (c)
 (Segundo año)



$$\begin{bmatrix} M & B \\ B' & O \end{bmatrix}$$

de donde obtiene después de algunas manipulaciones algebraicas que

$$\begin{bmatrix} M & B \\ B' & O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MZ\hat{\beta} \\ Y \end{bmatrix} \quad (10)$$

la ecuación 10 es también la solución a:

$$\begin{aligned} &\text{Min } (DX - DZ\hat{\beta})' (DX - DZ\hat{\beta}) \quad (11) \\ &\text{Sujeto a } B' X = Y \end{aligned}$$

y $(DX - DZ\hat{\beta})' (DX - DZ\hat{\beta})$ corresponde, a su vez, a la traza de la matriz de covarianza del vector u (ecuación 1), cuando se asume una estructura de autocorrelación de primer orden cuyo coeficiente de autocorrelación precisamente es uno! Es decir, el método de Ginsburgh consiste en estimar un coeficiente $\hat{\beta}$, y en distribuir los errores anuales utilizando una matriz de ponderaciones (ecuación 4) que minimiza las discontinuidades.

III. METODOLOGIA UTILIZADA

La metodología de Show y Lin genera un problema inaceptable en la distribución de los errores, cuando se encuentra un coeficiente de autocorrelación bajo. La sugerencia de Fernández no es muy atractiva pues no parece haber justificación para asumir que el coeficiente de autocorrelación del error de la ecuación 1, sea igual a 1. Ginsburgh se sitúa en un punto intermedio: distribuye los errores como si se hubiera supuesto un coeficiente de autocorrelación igual a uno, y calcula el vector de coeficientes $\hat{\beta}$ (independientemente del supuesto de autocorrelación unitaria) utilizando mínimos cuadrados generalizados.

Por lo tanto, el procedimiento utilizado consiste en separar el problema de estimación de los parámetros relevantes, del problema de la distribución del error. El primero se lleva a cabo mediante métodos estadísticos, y acudiendo a la técnica de regresión más apropiada. El segundo emplea un procedimiento más matemático, puesto

que no hay variable relacionada que permita rastrear el comportamiento trimestral del error. Obviamente ello no estima ni replica un proceso aleatorio; simplemente calcula una serie suavizada o modulada de "errores" trimestrales, a partir de la serie anual de errores calculados. Ello es equivalente a eliminar aquella parte de las variaciones irregulares de la serie objetivo que no pueden ser replicadas a partir del comportamiento de la serie relacionada

IV. CONCLUSION

Chow y Lin proponen el estimador no sesgado más eficiente cuando se considera que tanto la estimación de $\hat{\beta}$ como la repartición de los errores anuales se debe hacer por procedimientos estadísticos. Ginsburgh al separar en dos etapas — una de estimación de $\hat{\beta}$ y otra de interpolación matemática de los errores — constituye un estimador que en su conjunto no puede ser más eficiente que el de Chow y Lin, pero que "suaviza" la interpolación de los errores. Esa es la metodología utilizada por FEDesarrollo y la Sociedad Fiduciaria Bermúdez y Valenzuela.

A continuación se presentan algunos resultados preliminares del proceso de trimestralización de Cuentas Nacionales, el cual se está llevando a cabo sectorialmente: para cada sector se determina una relación (estimada por mínimos cuadrados generalizados) entre la variable anual a trimestralizar y la (s) variable (s) relacionadas anuales. Utilizando la relación encontrada con los valores trimestrales de la (s) variable (s) relacionadas, se calculan valores trimestrales de la actividad económica del sector. Finalmente, el valor de la actividad anual (observada) menos la suma de los valores trimestrales (estimados) se reparte utilizando la matriz de ponderación mencionada en el numeral anterior.

Los resultados de la trimestralización de todos los sectores se suman para obtener los valores trimestralizados del PIB. El Cuadro 2 presenta los resultados para el sector

CUADRO No. 2

**VALOR AGREGADO INDUSTRIA
Y PRODUCTO INTERNO BRUTO
MILLONES DE PESOS EN 1980
1980 - 1984**

Año Trim.	Valor agregado industrial	PIB	
1980	I	89733	382970
	II	93755	390237
	III	92826	396184
	IV	91509	422719
1981	I	87228	393742
	II	88181	391832
	III	93031	407799
	IV	91876	426088
1982	I	86075	399886
	II	88756	404316
	III	92157	411032
	IV	88013	424740
1983	I	84405	392242
	II	86132	398578
	III	91664	418786
	IV	92495	442988
1984	I	91356	422993
	II	91847	414543

industrial y la suma de la trimestralización de todos los sectores. Los primeros, a su vez, representan la suma de los diversos subsectores del sector industrial. Como variable relacionada (Z según la notación de este informe) utilizada para trimestralizar cada subsector, se tomó la variable correspondiente de la Encuesta Mensual Manufacturera.

BIBLIOGRAFIA

Boot, J.C.G., Feibes, W. y Lisman, J.H.C., (1967), Further Methods of Derivation of Quarterly Figures from Annual Data, *Applied Statistics*, Vol. 16 (1), pp. 65-75.

Cardozo, César Ovidio, (1982), "Estimación de una Serie Trimestral del Producto Interno Bruto", en *Revista de Planeación y Desarrollo*, Vol. XIV (2), Mayo-Agosto, pp. 32-40.

Chow, Gregory, y Lin, An-loh, (1971) Best Linear Unbiased Interpolation, Distribution, and "Extrapolation of Time Series by Related Series", *Review of Economics and Statistics*, Vol. 53, November, pp. 372-375.

Denton, Frank T. (1971), "Adjustment of Monthly or Quarterly Series to Annual Totals: An Approach Based on Quadratic Minimization", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66 (March), pp. 99-102.

Departamento Nacional de Planeación, (1983). "Trimestralización de Producto Interno Bruto".

Fernández, Roque, (1981), "A Methodological Note of the Estimation of time series", *Review of Economics and Statistics*.

Friedman, Milton, (1962). "The Interpolation of Time Series by Related Series", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 57, pp. 729-757.

Fondo Nacional de Proyectos de Desarrollo, (1983), "Contrato para la Trimestralización del Producto Interno Bruto de Colombia".

Ginsburgh, Víctor A. (1973), "A Further Note on the Derivation of Quarterly Figures Consistent With Annual Data", *Applied Statistics*, Vol. 22, No. 3, pp. 368-374.

Lisman, H.J.C. y Sandee, J. (1964), "Derivation of Quarterly Figures From Annual Data", *Applied Statistics*, Series C. XIII, No. 2, pp. 87-90.

Moncayo, Héctor, (1983), "Las Cuentas Trimestrales", Anexo 9 de *Les Comptes Nationaux Pre-provisoires de Colombie*, informe de la misión I.N.S.E.E. - Service de la Conjonctura, dirigida por F. Meunier.

Musalem, Alberto Roque (1971), "Dinero Inflación y Balanza de Pagos, la Experiencia de Colombia en la Post-Guerra", Publicación del Banco de la República, 1971.

Silva, Camilo y Ramírez, Jairo (1979), "Estimación del PIB Trimestral y Semestral", en *Revista de Planeación y Desarrollo*, Vol. XI (3), Septiembre - Diciembre 1979, pp. 175-191.

Theil, Henri, (1971). *Principles of Econometrics*, John Wiley and Sons, Inc. (USA).