Movilidad social, desigualdad de oportunidades y actividades delictivas: un enfoque teórico*

Carlos Alejandro Núñez T.**

Abstract

This article develops a model of endogenous criminal activities to study the effects of inequality of opportunities and social mobility on the crime level. In particular, a general equilibrium model derived from the economic theory of conflict is proposed, in which a group of heterogeneous agents choose the allocation of resources between productive and predatory activities. One of the main results is that the relationship between inequality of opportunities, social mobility and delinquent activities is non-monotonic and depends on the existing conditions of criminality in a given society. According to the model's set of parameters, this study finds counterintuitive results, like the reduction of aggregate crime level when the inequality of opportunities increases or social mobility decreases. The latter indicates that, under certain conditions, a tradeoff could exist between distributive equity and the security of private property claims.

Resumen

Este trabajo desarrolla un modelo en donde se endogenizan las actividades delictivas para estudiar los efectos de la desigualdad de oportunidades y la movilidad social sobre la incidencia de dichas actividades. En particular, se plantea un modelo de equilibrio general derivado de la teoría económica del crimen, en donde un grupo de agentes heterogéneos decide la asignación de recursos entre actividades productivas y actividades de apropiación ilegal de la riqueza. El resultado principal establece que la relación entre desigualdad de oportunidades, movilidad social y actividades delictivas no es monotónica y depende de las condiciones de criminalidad existentes en la sociedad. De acuerdo con el espacio de parámetros del modelo, este estudio encuentra resultados contraintuitivos, como la disminución del crimen frente a un aumento en la desigualdad de oportunidades o una reducción en la movilidad social. Lo anterior indica que, bajo ciertas condiciones, podría existir un "tradeoff" entre equidad distributiva y seguridad de la propiedad privada.

Palabras clave: Actividades delictivas, Desigualdad de oportunidades, Movilidad social, Equilibrio general.
Key words: Delinquent Activities, Inequality of Opportunities, Social Mobility, General Equilibrium.
JEL: C61, C62, C68, D11, D50, I31, I32.

Primera versión recibida el 29 de junio de 2010; versión final aceptada el 7 de diciembre de 2010.
Coyuntura Económica, Vol. XL, No. 2, segundo semestre de 2010, pp. 95-117. Fedesarrollo, Bogotá - Colombia.

* El autor agradece los aportes de Daniel Mejía, Juan Fernando Vargas y Álvaro Riascos.

** Información de contacto: carnune@uniandes.edu.co y cnunez@minhacienda.gov.co.

I. Introducción

El presente trabajo es una extensión de los modelos de Grossman (1998) y Grossman & Kim (2002a), en los cuales se presenta una economía de agentes racionales con dotaciones iniciales heterogéneas, que escogen la asignación eficiente entre actividades productivas y delictivas. La novedad de este estudio consiste en la inclusión de agentes con asimetrías en su dotación de capital humano; la introducción de una función que incluye el esfuerzo y las circunstancias[1]; el desarrollo completo del modelo -Grossman (1998) elabora algunos supuestos para llegar a una solución más sencilla-; y el debido análisis de estática comparativa. La presentación y desarrollo de modelos que incorporan supuestos similares se puede hallar en Imrohoroglu et ál. (1996), Conley & Wang (2004), Huang et ál. (2004), y Wittenberg (2008), entre otros. Adicionalmente, una exposición muy completa de los temas recurrentes de la teoría económica de las actividades delictivas y el desarrollo estándar de los modelos se encuentra en Garfinkel & Skaperdas (2006).

En línea con lo anterior, un claro vacío de la investigación existente es que la mayoría de estudios que intentan explicar la violencia en Colombia, a partir de aspectos socioeconómicos, se centran en la desigualdad de ingresos e ignoran otras variables como la falta de oportunidades (Sánchez, 2007). Por otro lado, Mejía (2004) también se refiere a esta brecha del desarrollo teórico:

> *Otro punto importante, que valdría la pena estudiar con mayor profundidad, es aquel de la relación entre la desigualdad (no solo de ingresos, sino también de oportunidades) y la aparición del conflicto*[2].

La inclusión de estas variables generalmente omitidas (desigualdad de oportunidades y movilidad social) en el modelo conduce a algunos resultados interesantes que demuestran el efecto determinante que poseen variables socioeconómicas distintas del ingreso sobre el nivel de criminalidad de la sociedad. Uno de los resultados centrales de este documento es que la relación entre movilidad social, desigualdad de oportunidades y actividades delictivas no es monotónica. En efecto, si el nivel de criminalidad prevalente en la sociedad supera un cierto nivel crítico, entonces el empeoramiento de las condiciones de equidad distributiva (en términos de oportunidades y movilidad social) conduce a una disminución de las actividades delictivas. Se explora la ambigüedad de esta relación, en línea con el trabajo de Cramer (2003), quien enfatiza la deficiencia en la calidad de la información sobre desigualdad y las posiciones encontradas de los investigadores en torno a este tema[3].

[1] Más abajo se explica el significado de estos términos en el contexto de la desigualdad de oportunidades y la movilidad social.

[2] óp. Cit. p. 20. La traducción es del autor.

[3] Véase Nafziger & Auvinen (2002) y Collier & Hoeffler (1998, 2004).

Para entender la relevancia de la desigualdad de oportunidades habría que analizar su relación con el concepto de movilidad social. Según la distinción que hace Roemer (1998 y 2002), los determinantes del ingreso se dividen en dos categorías: el *esfuerzo* (endógeno) y las *circunstancias* (exógenas). El esfuerzo es una variable que el individuo controla, mientras que las circunstancias se suponen por fuera del dominio individual (podrían ser la educación de los padres, el nivel socioeconómico de nacimiento, la raza, el género, etc.). Se dice que hay desigualdad de oportunidades cuando la brecha en el nivel de ingresos se debe principalmente a diferencias en las circunstancias.

Por otro lado, la movilidad social tiene dos dimensiones claramente definidas: intergeneracional e intrageneracional[4]. La primera posee una dimensión temporal que abarca varias generaciones, mientras que la segunda se limita a la vida del individuo. La movilidad social cuantifica la probabilidad de pasar de un nivel socioeconómico a otro; mientras más alta sea dicha probabilidad, mayor será la movilidad. Por tanto, ¿cómo se explica la movilidad en términos de esfuerzo y circunstancias? Entre mayor peso relativo tengan las circunstancias respecto al esfuerzo, menor movilidad social habrá. Un esquema sencillo ayuda a entender la explicación anterior[5]:

$$Ingresos_i = f\,[\alpha \times (Esfuerzo_i - \bar{E}), \beta \times (Circunstacias_i - \bar{C})]$$

Donde $\bar{E}$ y $\bar{C}$ son el esfuerzo y las circunstancias promedio de la economía, respectivamente. De forma intuitiva, la ecuación anterior postula que los ingresos de un individuo genérico denotado por *i* dependen de la brecha entre su esfuerzo y el esfuerzo promedio de la economía y de la brecha entre sus circunstancias y las circunstancias promedio. *Ceteris paribus*, los parámetros α y β, que indican el peso de cada componente en el ingreso, impactan la movilidad social; y el término $(Circunstacias_i - \bar{C})$ representa la desigualdad de oportunidades. Dado que las circunstancias son exógenas, el individuo sólo puede afectar el esfuerzo y, consecuentemente, la movilidad se deriva de este único factor. Un análisis más detallado de un modelo análogo para estimar la desigualdad de oportunidades se puede encontrar en Paes de Barros et ál. (2009).

La inclusión de los ingresos como función del esfuerzo y las circunstancias, en el marco de un modelo de equilibrio general, sustentado en la teoría económica de las actividades delictivas, es un aporte original del presente documento a la literatura económica del crimen. El tema ha cobrado gran relevancia a partir del trabajo de Roemer (1998), el cual ha generado toda una literatura relacionada que busca definir, modelar y cuantificar el problema de la desigualdad de oportunidades (Lefranc et ál., 2006; Pistolesi, 2008); además de elaborar políticas públicas conducentes a su mitigación (Moreno-Ternero, 2007).

[4] Véase de Gaer et ál. (2001) y Breen (1997).

[5] El siguiente esquema toma algunos elementos del índice de "disimilaridad" (Dissimilarity Index), presentado por Paes de Barros et ál. (2009), si bien se trata de un aporte original de este trabajo.

Finalmente, el documento tiene el siguiente orden: en la sección II se hace la presentación y el desarrollo del modelo, y en la sección III se presentan las conclusiones.

II. Modelo

A. Definiciones y supuestos

Una sociedad de tamaño normalizado a 1 se divide en $u > 1/2$ individuos con capital humano bajo, k, y $1 - u < 1/2$ individuos con capital humano alto K, con $K > k$. Sea $k = \bar{k} - \varepsilon$ y $K = \bar{k} + \varepsilon$, tal que $\varepsilon \in [0, \bar{k})$[6]. Los individuos de esta economía pueden escoger entre dos actividades mutuamente excluyentes: producir o apropiarse la riqueza de los demás. Supongamos que $n \leq u$ individuos con capital humano bajo eligen producir y $N \leq 1 - u$ individuos con capital alto eligen también producir. Por otro lado, independientemente de su tipo, la proporción de agentes que apropian riqueza ajena se denota por $r \leq 1$ (tal que $N + n + r = 1$). Sea:

$$R \equiv \frac{r}{N + n} \in [0, \infty) \qquad (1)$$

Donde R es la proporción de delincuentes respecto a la población trabajadora total. Por otro lado, los individuos que producen asignan una porción $g \in [0,1)$ de su riqueza a actividades defensivas y el $1 - g$ restante se va en consumo.

Sea: $$G \equiv \frac{g}{1 - g} \in [0, \infty),$$

la proporción entre la fracción invertida en defensa y la fracción consumida del ingreso. La proporción de los recursos que retienen los individuos que producen se denota por una función derivable p, creciente en G y decreciente en R. Adicionalmente, se introduce un parámetro θ que indica la eficacia relativa del número de criminales relativo a la población trabajadora, respecto a la proporción entre la fracción invertida en defensa y la fracción consumida del ingreso G. La función de tecnología del conflicto[7] ("Contest Success Function", en inglés) es:

$$p \equiv \frac{1}{1 + \theta\, R/G} \in [0, 1] \qquad (2)$$

Los individuos productores derivan utilidad del consumo y del ocio (el modelo es estático, así que, los individuos consumen todo lo que producen). El esfuerzo de los individuos con bajo y alto capital humano se denota por l y L, respectivamente.

Por otro lado, el ocio es una función negativa del esfuerzo y se asume $-l^{\gamma}$ y $-L^{\gamma}$ para agentes con bajo y alto capital humano, respectivamente[8]. El

[6] En este contexto, el capital humano es exógeno y está dado por las circunstancias de cada agente.

[7] Véase Hirshleifer (1991a y 2000) para una explicación más detallada de esta función.

[8] Con $\gamma > 1$.

ingreso de los agentes depende de la producción, que se explicará a continuación. Supongamos que existen dos estados de ingresos posibles: un nivel de ingresos alto w_h y un nivel de ingresos bajo w_l (necesariamente $w_h > w_l$). Para el individuo trabajador con capital humano bajo, la probabilidad de obtener el ingreso alto es q y, recíprocamente, la probabilidad de obtener ingresos bajos es $1\text{-}q$. En el caso del individuo con capital humano alto se da lo contrario: obtiene un ingreso alto con probabilidad $1\text{-}q$ y un ingreso bajo con probabilidad de q[9]. La función de probabilidad se define de la siguiente manera:

$$q = f\,(\mu \frac{k - \widehat{k}}{\widehat{k}}, \frac{l - \widehat{l}}{\widehat{l}}) = f\,(x, y) \qquad (3)$$

Donde $\widehat{k} = uk + (1 - u)K$ y $\widehat{l} = ul + (1 - u)L$, son los promedios del capital humano y el esfuerzo, respectivamente[10]. La función q debe cumplir los siguientes supuestos:

- $\frac{\partial q}{\partial l}, \frac{\partial q}{\partial k} > 0$: creciente en el esfuerzo y el capital respectivo.
- $q \in [0, 1] \subset \mathcal{R}$: por definición de probabilidad.
- $1\text{-}q = f\,(\mu \frac{K\text{-}\widehat{k}}{\widehat{k}}, \frac{L\text{-}\widehat{l}}{\widehat{l}})$: simétrica respecto a su complemento.
- $q = f\,(0, 0) = 1/2$: Iguales capitales y esfuerzos implican igual probabilidad, para que la función quede bien definida.

El parámetro $\mu \in (0, \infty)$ indica la ponderación del capital relativo en la probabilidad de obtener el ingreso alto y, por ende, es un indicador de movilidad social. En este contexto se entiende movilidad social por el aumento o caída de los ingresos, producto del esfuerzo individual (o en general, de la variable endógena que el agente controla). Por lo tanto, se dan los siguientes casos extremos:

- $\lim_{\mu \to 0} q = f\left(\frac{l - \widehat{l}}{\widehat{l}}\right)$: la probabilidad de obtener el ingreso alto depende sólo del esfuerzo y hay completa movilidad social.
- $\lim_{\mu \to \infty} q = 0 \quad dado \quad k < \widehat{k}$: este es un escenario de completa inmovilidad, dado que la probabilidad de obtener el ingreso alto para el agente con capital humano bajo siempre es cero, independientemente de su esfuerzo (un valor intermedio de μ indica un mayor o menor grado de movilidad social, de acuerdo con su magnitud).

Suponiendo neutralidad al riesgo, lo anterior implica que el consumo potencial esperado del

[9] Se habría podido también asumir que las probabilidades del agente con capital humano alto no son complementarias con las del individuo de capital humano bajo, pero este supuesto simplifica mucho la derivación de los resultados del modelo. El supuesto es consistente con la situación de competencia en el mercado laboral y es natural que, dadas las dos probabilidades de obtener el ingreso alto q y q', $\partial q/\partial q' < 0$. Adicionalmente, como se va a asumir una función de probabilidad logística (véase la nota al pie 13) con la forma funcional dada por la ecuación (3), se puede concluir luego de un poco de álgebra, que las probabilidades son necesariamente complementarias.

[10] $\widehat{k}$ y $\widehat{l}$ son medidas del capital promedio y el esfuerzo promedio de la masa trabajadora, suponiendo que todos los agentes laboran.

agente, luego del gasto en defensa, con capital humano bajo es:

$$E[Y_k] = [w_H q + w_L(1 - q)]\,(1 - g) =$$

$$[(w_H - w_L)\,q + w_L]\,\frac{1}{1 + G} \tag{4}$$

Análogamente, el consumo potencial del individuo con capital alto es:

$$E[Y_k] = [w_H(q - 1) + w_L q](1 - g) =$$

$$[(w_H - w_L)\,(1 - q) + w_L]\,\frac{1}{1 + G} \tag{5}$$

B. Funciones de utilidad directa e indirecta

En este modelo se establecen las funciones de utilidad de tres tipos de individuos: la utilidad de los agentes con *k* que deciden producir (U_k); la utilidad de los agentes con *K* que deciden también producir (U_K); e, indistintamente de su capital humano, los agentes reciben una utilidad U_D por delinquir. En general, las funciones de utilidad son de la forma $U_i = C_i + dO_i$, donde C_i es el consumo, O_i es el ocio[11] y *d* pondera qué tanto pesa el ocio en la función de utilidad. Además, el consumo depende de *p*, la porción retenida luego del ataque y del valor esperado del consumo potencial del agente *i*:

$$C_i = pE[Y_i]$$

Dado lo anterior, la primera función de utilidad directa es:

$$U_k = p[(w_H - w_L)q + w_L]\,\frac{1}{1 + G} - dl^{\gamma}$$

Sea:

$$A \equiv p(w_H - w_L)\,\frac{1}{1 + G} \tag{6}$$

Simplificando, se obtiene:

$$U_k = A(q + \frac{w_L}{w_H - w_L}) - dl^{\gamma} \tag{7}$$

Por otro lado, $U_k = p[(w_H - w_L)(1\text{-}q) + w_L]\,\frac{1}{1 + G} - dL^{\gamma}$, que se puede reescribir como:

$$U_k = A(1 - q + \frac{w_L}{w_H - w_L}) - dL^{\gamma} \tag{8}$$

Y, finalmente, la riqueza de los predadores se puede expresar como la fracción que logran quitar a los productores, multiplicado por la riqueza total de la sociedad. Además, se supone que los delincuentes se reparten el botín equitativamente. Dado que no se endogeniza el esfuerzo de los delincuentes, se asume que sólo los agentes productores lo ejercen y, consecuentemente, el ocio de los predadores es cero. Formalmente, $U_D = \frac{1 - p}{r}\,(NE[Y_K] + nE[Y_k])$.

Utilizando la expresión (2), la utilidad de los delincuentes se puede reescribir en términos del gasto en defensa como:

[11] Esto implica que el consumo y el ocio son bienes sustitutos. Se podría postular una función de utilidad con algún grado de complementariedad (tipo CES), pero esto complica el álgebra excesivamente.

$$U_D = \frac{\theta A}{G(N+n)} \left[N \left(1 - q + \frac{w_L}{w_H - w_L}\right) + n \left(q + \frac{w_L}{w_H - w_L}\right)\right] \qquad (9)$$

Las condiciones de primer orden para la utilidad de los agentes productores con k y K son, respectivamente:

$$\frac{\partial U_k}{\partial l} = 0 \rightarrow \frac{\partial q}{\partial l} = \frac{d\gamma l^{\gamma-1}}{A} \text{ y } \frac{\partial U_K}{\partial L} = 0 \rightarrow - \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{d\gamma L^{\gamma-1}}{A}$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene[12]:

$$l^* = L^* \qquad (10)$$

Por simplicidad, asumimos una forma logística para la probabilidad q, que cumple con los supuestos i-iv especificados antes[13]:

$$q = \frac{1}{1 + e^{-\left[\frac{\mu(k - \hat{k})}{\hat{k}} + \frac{l - \hat{l}}{\hat{l}}\right]}} \qquad (11)$$

Lo anterior implica que[14]:

$$l^* = L^* = \left[\frac{A(1-u)q^*(1-q^*)}{d\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \qquad (12)$$

Donde q^* (la probabilidad de equilibrio) está dada por:

$$q^* = \frac{1}{1 + e^{-\left[\frac{\mu(k - \hat{k})}{\hat{k}} + \frac{l^* - \hat{l}^*}{\hat{l}^*}\right]}} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{\mu(k - \hat{k})}{\hat{k}}}} \qquad (13)$$

Por simplicidad se introduce la siguiente notación:

$$\omega \equiv \frac{w_L}{w_H - w_L} \qquad (14)$$

$$\Gamma \equiv \frac{1 - u}{\gamma} \qquad (15)$$

Reemplazando los valores óptimos del esfuerzo (12) y la probabilidad óptima (13) en las funciones de utilidad directa (7), (8) y (9), y simplificando se obtienen las siguientes funciones de utilidad indirecta:

$$U_k^* = A[\omega + q^* - \Gamma q^* (1 - q^*)] \qquad (16)$$

$$U_K^* = A[1 + \omega - q^* - \Gamma q^* (1 - q^*)] \qquad (17)$$

$$U_D^* = \frac{\theta A}{G(N+n)} [N (1 + \omega - q^*) + n(\omega - q^*)] \qquad (18)$$

C. Solución del modelo

De acuerdo con las tres funciones de utilidad definidas anteriormente, se generan cinco posibles equilibrios. A cada uno de estos casos se asocia el número total de individuos en cada categoría

12 Ver Apéndice, numeral 1.

13 Esta forma funcional logística se usa también para modelar la fracción ganada en un concurso (i.e. *Contest Success functions*), como se aprecia en Hirshleifer (1991a, 2000).

14 Ver Apéndice, numeral 2.

(capital humano bajo o alto) que deciden trabajar o delinquir. La razón fundamental de que haya sólo cinco casos es que la utilidad de los trabajadores con capital humano alto siempre es superior a la utilidad de trabajar para los individuos con capital bajo. Esto establece que, en cualquier caso, $U^*_K > U^*_k$.

Caso 1:
$U^*_D > U^*_K > U^*_k \quad con \quad N = n = 0, \quad R = \infty$

En este caso, la utilidad de ser delincuente es superior a la de trabajar para todos los agentes. No obstante, esta opción no es posible, dado que implicaría que toda la población estaría conformada por delincuentes, y no habría nadie a quien robar. Como se verá posteriormente, la decisión óptima de defensa (el G que maximiza U_k y U_K) descarta este escenario por completo.

Caso 2:
$U^*_D = U^*_K > U^*_k \quad con \quad n = 0, \quad N \in (0,1 - u), R \in (U,\infty)$

Con

$$U \equiv \frac{u}{1 - u} \tag{19}$$

Los agentes con capital humano alto se muestran indiferentes entre trabajar y delinquir, mientras que los individuos con capital humano bajo prefieren delinquir.

Caso 3:
$U^*_K > U^*_D > U^*_k \quad con \quad n = 0, \quad N = 1 - u, \quad R = U$

Todos los agentes con capital alto deciden trabajar y todos los agentes con capital bajo eligen apropiarse de los recursos. Existe un único equilibrio, con la tasa de criminalidad R igual a U.

Caso 4:
$U^*_K > U^*_D = U^*_k \quad con \quad n \in (0,u), N = 1 - u \quad R \in (0, U)$

Los agentes con bajo capital humano se muestran indiferentes entre trabajar y delinquir, mientras que los individuos con capital alto prefieren trabajar.

Caso 5:
$U^*_K > U^*_k > U^*_D \quad con \quad n = u, \quad N = 1 - u \quad R = 0$

En el último caso, la utilidad de delinquir es menor que la de trabajar, independientemente de la dotación de capital humano del agente. Se trata de un escenario con derechos de propiedad seguros, en donde la cantidad de criminales *(r)* es cero.

Haciendo uso de las ecuaciones de utilidad indirecta y los valores de n, N y r se puede obtener el valor crítico de G para cada caso. Dado que la variable G es la que, en última instancia, determina los equilibrios, de acuerdo con cada escenario, los valores críticos de G indican en qué caso nos encontramos. Intuitivamente, un valor muy alto de G tendería a llevar el equilibrio hacia el último escenario, dado que los delincuentes se apropian de una cantidad menor de riqueza y la utilidad caería hasta el punto que trabajar proporciona una mayor utilidad, incluso para los agentes menos favorecidos. El otro extremo es que el gasto en defensa sea muy bajo, con lo cual delinquir se vuelve más apetecible y esto haría el caso 2 más probable.

$U_D^* > U_K^*$

A continuación se hallan los valores críticos de *G* para los cinco casos.

Caso 1:

$U^*_D > U^*_K > U^*_k \quad con \quad N = n = 0 \quad R = \infty$

El valor crítico está determinado por la condición $U^*_D > U^*_K$. Dado que la cantidad de trabajadores es 0, no es posible reemplazar el valor directamente en el denominador de (18) y en cambio, hay que hallar límite. Tomando lo anterior en cuenta, el primer valor crítico es[15]:

$$G < G_1 \tag{20}$$

Donde

$$G_1 \equiv \theta \left[\frac{1 + \omega - q^*}{1 + \omega - q^* - \Gamma q^* (1 - q^*)} \right] \tag{21}$$

Caso 2:

$U^*_D = U^*_K > U^*_k \quad con \quad n = 0, \quad N \in (0,1 - u), R \in (U,\infty)$

En este caso, el valor crítico estará dado por la condición $U^*_D = U^*_K$ y se deriva de forma análoga al caso anterior:

$$G = G_1 \tag{22}$$

Caso 3:

$U^*_K > U^*_D > U^*_k \quad con \quad n = 0, \quad N = 1 - u, \quad R = U$

Los valores críticos están dados por los valores extremos de la condición $U^*_K > U^*_D > U^*_k$. Nuevamente, la derivación es similar al primer caso y por tanto se omite el procedimiento:

$$G_1 < G < G_3 \tag{23}$$

Donde:

$$G_3 \equiv \theta \left[\frac{1 + \omega - q^*}{\omega + q^* - \Gamma q^* (1 - q^*)} \right] \tag{24}$$

Caso 4:

$U^*_K > U^*_D = U^*_k \quad con \quad n \in (0, u), N = 1 - u, \quad R \in (0,U)$

En este escenario, el valor crítico está dado por la condición $U^*_D = U^*_k$. Este caso es relativamente más complejo y su derivación formal se encuentra en el numeral 4 del Apéndice. El resultado es *G* como función lineal de *R*:

$$G = mR + G_2 \tag{25}$$

Donde

$$m = \frac{G_3 - G_2}{U} \tag{26}$$

y

$$G_2 \equiv \theta \left[\frac{\omega + q^* + (1 - u)(1 - 2q^*)}{\omega + q^* - \Gamma q^* (1 - q^*)} \right] \tag{27}$$

Caso 5:

$U^*_K > U^*_k > U^*_D \quad con \quad n = u, \quad N = 1 - u, \quad R = 0$

La condición $U^*_k > U^*_D$ arroja el valor crítico para este caso:

15 Ver Apéndice, numeral 3.

$$G > G_2 \tag{28}$$

Recapitulando

Caso 1: $G < G_1, \quad R = \infty$

Caso 2: $G = G_2, \quad R \in (U, \infty)$

Caso 3: $G_2 < G < G_3, \quad R = U$

Caso 4: $G = \left(\frac{G_3 - G_2}{U}\right) R + G_2, \quad R \in (0, U)$

Caso 5: $G > G_2, \quad R = 0$

Por otro lado, los individuos escogen G de tal forma que maximizan su utilidad,

$$\underset{\{G\}}{\arg\max}\; U_{i \in \{k, K\}} \Longrightarrow \quad \frac{\partial U_i}{\partial G} = \frac{\partial A}{\partial G} = 0$$

El resultado sale directamente de la condición de primer orden[16]:

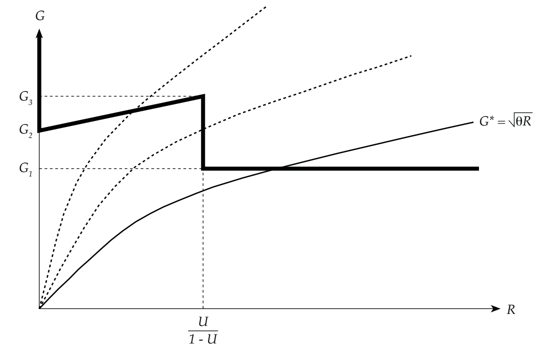
$$G^* = \sqrt{\theta R} \tag{29}$$

El Gráfico 1 es una representación del modelo.

En el eje horizontal se representa R, la proporción de agentes delincuentes a trabajadores; y en el eje vertical G, la proporción entre la fracción invertida en defensa y la fracción consumida del ingreso. En la dimensión horizontal hay un único valor crítico $R = u/(1 - u) \equiv U$, mientras en el eje

Gráfico 1

REPRESENTACIÓN DEL MODELO



de la defensa se tienen tres valores críticos G_1, G_2 y G_3. El valor crítico se desprende de la definición R de (véase la ecuación (1)) cuando se presenta la situación de esquina en la cual todos los agentes con capital humano bajo delinquen y todos los individuos de capital humano alto trabajan. La recta quebrada que contiene tres segmentos con pendientes distintas (la pendiente es positiva en $R \in [0, U)$, infinita en $R = U$ y cero en $R \in (U, \infty]$) representa el nivel de G consistente con cada R, de acuerdo con el equilibrio del modelo determinado por la elección de los agentes entre trabajar y delinquir. La curva con forma de parábola en el eje horizontal, $G^* = \sqrt{\theta R}$, es la función de defensa G óptima para los agentes productores; que depende del parámetro θ, la eficacia relativa de los criminales, y de R. Finalmente, el punto donde se cruzan G^* y la recta quebrada determina el equilibrio general del modelo.

[16] Ver Apéndice, numeral 5.

Para valores razonables[17] de θ y de los demás parámetros que definen los valores críticos, la curva de ecuación $G^* = \sqrt{\theta R}$ siempre cortará alguno de los tres segmentos que se ven en el Gráfico 1 en un punto, definiendo un único valor de equilibrio de R. Esto implica que los casos 1 y 5 son imposibles. El espacio de R estaría representado por $\{R : R \in (0, \infty) \subset \mathcal{R}\}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, el valor del parámetro θ determina tres casos posibles[18].

$$R = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta - 4mG_2}}{2m}\right)^2 \in (0, U) & si \quad \theta > \dfrac{G_3^2}{U} \\ U & si \quad \dfrac{G_1^2}{U} \leq \theta \leq \dfrac{G_3^2}{U} \\ \dfrac{1}{\theta} G_1^2 \in (U, \infty) & si \quad \theta < \dfrac{G_1^2}{U} \end{cases} \qquad (30)$$

En el primer caso, θ es lo suficientemente grande para que la curva de defensa óptima cruce la recta con pendiente m entre cero y U. En el segundo escenario, la curva cruza la recta vertical, y en el tercero, la recta horizontal.

D. Impacto de la movilidad social y la desigualdad de oportunidades

El objetivo de esta sección es analizar el comportamiento de R (la tasa de criminales a trabajadores), frente a cambios en las variables μ y ε. Según la ecuación (30), el cambio en la variable R dependerá de los valores críticos G_1, G_2 y G_3. El aumento o disminución de un valor crítico simplemente altera la decisión de los agentes sobre trabajar o delinquir, lo cual a su vez impacta la elección óptima de la defensa. Por ejemplo, suponiendo que la curva $G = \sqrt{\theta R}$ corta la recta horizontal (ver Gráfico 1), un aumento de G^*_1 se traduce en un desplazamiento del punto de corte hacia la derecha, lo cual implica una proporción R de equilibrio mayor. Lo siguiente es analizar la sensibilidad de los valores críticos ante cambios en μ y ε. Según la ecuación (30), se estudiará cada uno de los tres casos por separado, suponiendo que, excepto por μ ó ε, todos los demás parámetros $(w_L, w_H, \theta...)$ permanecen constantes.

Caso: $\theta > \dfrac{G_3^2}{U}$

El primer caso es el más complejo. Derivar directamente R para el primer caso es relativamente extenso, por lo cual se opta por derivar implícitamente la relación[19]:

$$mR + G_2 = \sqrt{\theta R}$$

Se deriva implícitamente la expresión anterior con respecto a $i \in \{\mu, e\}$ y se reemplaza m en el numerador para obtener la derivada:

---

17 Se necesita que los parámetros sean positivos y acotados.

18 Ver Apéndice, numeral 6.

19 Ídem.

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{\frac{\partial G_3}{\partial i}\frac{R}{U} + \left(1 - \frac{R}{U}\right)\frac{\partial G_2}{\partial i}}{\frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{R}} - m} \qquad (31)$$

La ecuación anterior posee las siguientes propiedades:

- El denominador es siempre positivo, dado que $\sqrt{\theta}/(2\sqrt{R})$ es la tangente a la curva de defensa óptima en el punto de corte con la recta de pendiente m, y dicha tangente tiene siempre una pendiente mayor que la recta en el punto de intersección. Demostración:

$$\frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{R}} - m = \frac{\sqrt{\theta} m}{\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta - 4mG_2}} - m = \frac{m\sqrt{\theta - 4mG_2}}{\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta - 4mG_2}} > 0$$

- El valor que acompaña la derivada de G_2 es necesariamente no negativo. Demostración:

  Dado que $R<U$ para este caso, esto implica que:

$$1 - \frac{R}{U} > 0$$

- Tomando lo anterior en cuenta, el signo de la derivada depende sólo de los signos de:

$$\frac{\partial G_2}{\partial i} \text{ y } \frac{\partial G_3}{\partial i}$$

Antes de comenzar a derivar los valores críticos, es relevante conocer el signo de $\frac{\partial q^*}{\partial i}$.

De acuerdo con la ecuación (13), la probabilidad óptima de obtener el salario alto para el agente con bajo capital humano depende *negativamente* tanto de la falta de movilidad social ($\partial q^*/\partial \mu < 0$), como de la desigualdad de oportunidades ($\partial q^*/\partial \varepsilon < 0$). Por lo tanto, se obtiene el siguiente resultado formal:

$$\frac{\partial q^*}{\partial i} < 0, \quad \forall i \in \{\mu, \varepsilon\} \qquad (32)$$

De la ecuación (31) se dedujo que $\frac{\partial R}{\partial i}$ depende únicamente de los signos de $\frac{\partial G_2}{\partial i}$ y $\frac{\partial G_3}{\partial i}$. Por lo tanto, se tiene la siguiente relación lógica: Si $\frac{\partial G_2}{\partial i} > 0$ y $\frac{\partial G_3}{\partial i} > 0$, entonces $\frac{\partial R}{\partial i} > 0$. En palabras, si los indicadores de falta de movilidad social y desigualdad de oportunidades afectan *positivamente* los dos últimos valores críticos, entonces, la tasa R de criminales respecto a trabajadores se ve afectada también *positivamente* por dichos parámetros. No es difícil demostrar que[20]:

$$\frac{\partial G_2}{\partial i} > 0 \qquad (33)$$

y

$$\frac{\partial G_3}{\partial i} > 0 \qquad (34)$$

Por lo tanto, para el primer caso:

$$\frac{\partial R}{\partial i} > 0 \quad con \quad R \in (0, U) \qquad (35)$$

En palabras, para el primer caso se tiene que un descenso de la movilidad social o un aumento de la des-

[20] Ver Apéndice, numeral 7.

igualdad de oportunidades redunda en un aumento de la tasa de criminalidad *R*. La intuición detrás del resultado es que nos encontramos en un escenario donde todos los agentes con *K* deciden trabajar y los agentes con *k* son indiferentes entre producir y apropiar riqueza. En la medida que suben μ y ε, el consumo potencial de trabajar cae $U_k \downarrow$ y los agentes con bajo capital humano deciden delinquir más.

Caso: $\frac{G_1^2}{U} \leq \theta \leq \frac{G_3^2}{U}$

Dado que $R = U$ para cualquier valor de θ en este rango, se puede concluir que la tasa de criminalidad no depende de los parámetros de movilidad y desigualdad de oportunidades. Por lo tanto,

$$\frac{\partial R}{\partial i} = 0 \quad con \quad R = U \tag{36}$$

Caso: $\theta < \frac{G_1^2}{U}$

Para este caso se tiene que $R = \frac{1}{\theta} G_1^2$, lo cual implica que $\frac{\partial R}{\partial i}$ sólo depende de $\frac{\partial G_1}{\partial i}$. Es sencillo demostrar que[21]:

$$\frac{\partial G_1}{\partial i} < 0 \tag{37}$$

Y, en consecuencia,

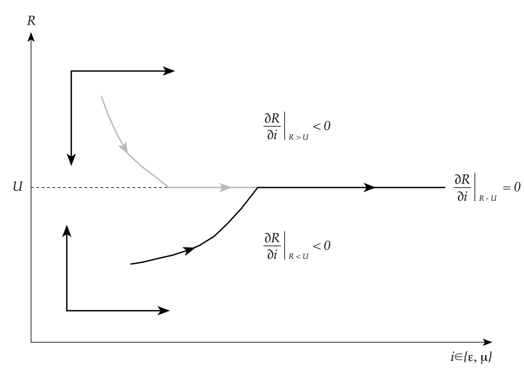
$$\frac{\partial R}{\partial i} < 0 \quad con \quad R \in (U, \infty) \tag{38}$$

Si la tasa de criminales a trabajadores es superior a *U*, entonces la mayor desigualdad de oportunidades o menor movilidad social tiende a disminuir el crimen. El canal de transmisión de este resultado es el siguiente:

En este caso nos encontramos en una sociedad donde $U^*_D = U^*_K > U^*_k$. Esto implica que todos los individuos con capital bajo deciden delinquir y los individuos con capital humano alto son indiferentes entre producir y apropiar riqueza. En otras palabras, la única decisión que afecta la tasa de criminalidad es la que hagan los agentes con *K*. Según la ecuación (17), la mayor desigualdad de oportunidades y menor movilidad social favorece positivamente a los agentes con capital humano alto, dado que su consumo potencial aumenta. Esto lleva a que más agentes decidan trabajar y menos elijan delinquir. A continuación una representación gráfica del resultado general del modelo (Gráfico 2).

Gráfico 2

REPRESENTACIÓN DEL MODELO



21 Ídem.

El anterior es un diagrama de fase que ilustra la dirección que toma *R*, ante cambios en ε y μ. Por debajo de $R = U$ existe una relación positiva entre las variables y por encima de dicha condición sucede lo contrario. El equilibrio se encuentra justamente en $R = U$, donde la derivada es cero.

E. Resultados

El resultado fundamental del modelo es que la relación entre movilidad social, desigualdad de oportunidades y actividades delictivas no es monotónica. Existe un valor crítico $(R = U)$ que determina el signo de la derivada en cada caso. A continuación se explica el canal de transmisión de este resultado:

El escenario en el cual $R < U$ concuerda con el siguiente ordenamiento de las utilidades, $U^*_K > U^*_D = U^*_k$. Esto sencillamente implica que la utilidad de trabajar de los agentes con el capital humano alto es siempre mayor a la utilidad de delinquir. Por otro lado, los agentes con el capital bajo son indiferentes entre trabajar y delinquir, lo cual implica que la única decisión que afecta el valor *R* de equilibrio es la que estos individuos tomen. Un aumento de los parámetros de desigualdad de oportunidades e inmovilidad social hace que el consumo potencial de trabajar de los agentes con capital humano bajo decrezca. Es este mecanismo el que hace que los agentes con *k* decidan delinquir ante el paulatino empeoramiento de la situación laboral. Se encuentra que las personas menos favorecidas tienen un incentivo a especializarse en la apropiación de los recursos, mientras que los más favorecidos optan por el trabajo. Se trata del usual *tradeoff* entre producción o ataque, donde los agentes eligen la actividad en la cual son más productivos.

El escenario opuesto $(R > U)$ coincide con el siguiente ordenamiento de las utilidades: $U^*_D > U^*_K = U^*_k$. En este caso, la decisión entre trabajar y delinquir de los agentes con capital humano alto determina el nivel de criminalidad de la sociedad. Un aumento de la desigualdad de oportunidades o una disminución de la movilidad social afecta positivamente la probabilidad de obtener el ingreso mayor para los individuos con capital humano alto[22]. Dado que estos individuos derivan más utilidad de las actividades productivas, la proporción de criminales a trabajadores *(R)* tiende a disminuir. Por eso es que, en este contexto, la relación entre desigualdad de oportunidades, movilidad social y actividades delictivas sigue un patrón contrario al del escenario anterior.

Otro resultado interesante que se puede verificar de manera directa es que, si no hubiera desigualdad de oportunidades, la utilidad de todos los agentes sería idéntica. Con $\varepsilon = 0$ la función de probabilidad es $q^* = 1/2$, y la utilidad de los agentes se iguala $U^*_k = U^*_K$. Algo análogo sucede si se supone que hay completa movilidad social y las circunstancias poseen una ponderación de

22 Basta ver que la función de probabilidad de obtener dicho ingreso para los agentes con capital humano alto es creciente en los parámetros μ y ε.

cero (i.e. $\mu = 0$) en la función q^*. Este escenario es similar al primer modelo estudiado por Grossman (1998, pp. 171-174), en el cual sólo hay una categoría de individuo. Como afirma el autor, los derechos de propiedad (relacionados con la tecnología del conflicto) estarán más seguros en el caso de una sociedad homogénea, relativo al escenario con una cantidad suficientemente grande de agentes desfavorecidos.

Finalmente, el equilibrio del modelo es $R = U$, situación en la cual los agentes con capital alto se especializan en trabajar y los agentes con capital bajo escogen delinquir. Este es un estado atractivo cuyo nivel estará determinado en última instancia por la proporción U. En la medida que disminuya la población con capital humano bajo, menor será también el crimen de equilibrio. Por otro lado, aumentos en el parámetro θ de eficiencia de las actividades delictivas hacen que el crimen aumente para los casos considerados[23]. Por lo tanto, la desigualdad de oportunidades y la movilidad social son unos elementos particulares del crimen, pero en ningún momento constituyen la totalidad del análisis de este complejo fenómeno.

III. Conclusiones

Como se afirmaba en la parte inicial, la principal conclusión de este trabajo es que la relación entre la desigualdad de oportunidades, la movilidad social y el nivel de criminalidad posee un carácter ambiguo y que la solución particular para niveles relativamente altos de criminalidad es contraintuitivo. En efecto, el modelo predice que para niveles de criminalidad *(R)* superiores al punto crítico *(U)*, un empeoramiento de la equidad distributiva en términos de oportunidades y movilidad social, podría contribuir a disminuir el nivel de las actividades delictivas. Esta situación se presenta dado que la desigualdad favorece a los individuos mejor posicionados en términos de capital humano, lo cual sirve de motivación para especializarse en actividades productivas y así aprovechar la ventaja comparativa.

Por otro lado, no es posible cuantificar el impacto preciso sobre el nivel de criminalidad, dada la complejidad del modelo. El esquema planteado simplemente aspira a mostrar el resultado general que se observa a nivel teórico, a la espera de un estudio empírico que logre superar las deficiencias de información que menciona Cramer (2003). Trabajos futuros podrían suavizar algunos supuestos, introducir nuevos agentes al modelo (por ejemplo el Gobierno), darle una dimensión intertemporal al problema o testearlo usando experimentos (Carter & Anderton, 1999). Éstas representan posibles sendas de investigación en el futuro.

Este trabajo también motiva algunas consecuencias de política. Los agentes del mercado laboral deberían propender a reducir la desigualdad de oportunidades y aumentar la movilidad social,

---

23 La solución completa es: $\frac{dR}{d\theta} = \begin{cases} > 0 & si \quad R \neq U \\ = 0 & si \quad R = U \end{cases}$

para incentivar las actividades productivas y desincentivar el crimen. Si bien es cierto que en sociedades relativamente violentas estas políticas podrían exacerbar el conflicto, es claro que una sociedad sólo puede llegar a niveles de criminalidad altos cuando la porción de su población con capital humano bajo decide especializarse en actividades delictivas, como respuesta a la reducción de su consumo potencial[24]. El crimen únicamente se reduce porque los agentes favorecidos con capital humano alto, que inicialmente eran indiferentes entre robar y producir, deciden optar por la segunda opción y así aprovechar su ventaja comparativa.

La segunda consecuencia de política tiene que ver con la brecha de cantidad entre agentes con capital humano bajo y alto. En la medida que esta diferencia sea mayor, el equilibrio estacionario de criminalidad del modelo también será mayor. Esto porque el valor crítico depende positivamente de la porción de agentes con capital humano bajo. Esto implica que cuanto mayor sea la proporción de la población en condiciones desfavorables, mayor será el nivel delictivo del estado estacionario. Este resultado motiva la adopción de políticas públicas para nivelar el acervo de capital humano y así reducir sustancialmente el crimen que surge de la segregación entre individuos con menor y mayor capital, pilar fundamental del presente modelo.

Finalmente, la teoría económica del crimen constituye un área relativamente inexplorada y es precisamente en la conjunción entre Economía, Teoría de Juegos y el estudio de actividades delictivas donde podría encontrarse la solución a muchas de nuestras incógnitas actuales. En estas líneas, vale la pena retomar la famosa analogía de Hirshleifer (1993), que indica un aspecto fundamental de la naturaleza humana, subvalorado por la ciencia económica tradicional:

> *Quiero argumentar que nuestra profesión ha tomado en su conjunto, no una visión demasiado dura, sino una demasiado benigna de la iniciativa humana... la tradición ha... pasado por alto lo que yo llamo el lado oscuro de la fuerza- es decir, el crimen, la guerra y la política. Es como contar la historia de Luke Skywalker... sin mencionar a Darth Vader*[25].

---

24 De hecho, en este escenario hipotético todos los individuos con capital humano bajo han elegido la vía delictiva, como se explica en el tercer párrafo de la sección de resultados.

25 óp. Cit. p. 2.

Bibliografía

Breen, Richard (1997). "Inequality, Economic Growth and Social Mobility"; *The British Journal of Sociology*, Vol. 48. No. 3, pp. 429-449.

Carter, John R. & Anderton, Charles H. (1999). "An experimental test of a predator-prey model of appropriation"; *Journal of Economic Behavior and Organization*, Vol. 45, pp. 83-97.

Collier, Paul & Hoeffler, Anke (1998). "On economic causes of civil war"; *Oxford Economic Papers*, Vol. 50, pp. 563-573.

_____(2004). "Greed and grievance in civil war"; *Oxford Economic Papers*, Vol. 56, pp. 563-595.

Conley, John P. & Wang, Ping (2004). "Crime, Ethics and Occupational Choice: Endogenous Sorting in a Closed Model", VanderbiltUniversity, Documento de Trabajo No. 04-W02.

Cramer, Christopher (2003). "Does Inequality Cause Conflict?", *Journal of International Development*, Vol. 15, pp. 397-412.

Garfinkel, Michelle R. & Skaperdas, Stergios (2006). "Economics of Conflict: An Overview"; en *Handbook of Defense Economics*, T. Sandler and K. Hartley, eds., Vol. 2, capítulo 22.

Grossman, Herschel I. (1998). "Producers and Predators"; *The Pacific Economic Review*, 3:3, pp. 169-187.

Grossman, Herschel I.& Kim, Minseong (2002a). "Predation, Efficiency, and Inequality"; *Journal of Institutional and Theoretical Economics*, Vol. 158, pp. 393-407.

Hirshleifer, Jack (1991a). "The Technology of Conflict as an Economic Activity"; *The American Economic Review*, Vol. 81, No. 2, pp. 130-134.

_____ (1991b). "The Paradox of Power"; *Economics and Politics*, Vol. 3, No. 3, pp. 177-200.

_____ (1993). "The Dark Side of the Force"; UCLA Department of Economics, *Working Paper* # 702.

_____ (2000). "The Macrotechnology of Conflict"; *Journal of Conflict Resolution*, Vol. 44, No. 6, pp. 773-792.

Huang, ChienChieh, Laing, Derek & Wang, Ping (2004). "Crime and Poverty: A Search-Theoretic Approach", *International Economic Review*, Vol. 45, No. 3, pp. 909-938.

Imrohoroglu, Ayse, Merlo, Antonio & Rupert, Peter (1996). "On the Political Economy of Income Redistribution and Crime"; Federal Reserve Bank of Cleveland, Documento de trabajo 9609.

Lefranc, Arnaud; Pistolesi, Nicolas & Trannoy, Alain (2006). "Inequality of opportunities vs. inequality of outcomes: Are Western societies all alike?"; Society for the Study of Economic Inequality, Documento de trabajo 2006-54.

Mejía, Daniel (2004). "Conflict and Economic Growth: A Survey of the Theoretical Links". Disponible en: http://www.webpondo.org/filesoctdic2004/conflict_growth.pdf; recuperado el 8 de junio de 2009.

Mejía, Daniel & St. Pierre, Marc (2007). "Unequal opportunities and human capital formation"; *Journal of Development Economics*, Vol. 86, No. 2, pp. 395-413.

Moreno-Ternero, Juan D. (2007). "On the Design of Equal-Opportunity Policies", *Investigaciones Económicas*, Vol. 31, No. 3, pp. 351-374.

Nafziger, E. Wayne & Auvinen, Juha (2002). "Economic development, inequality, war, and state violence"; *World Development*, Vol. 30, pp. 153-163.

Paes de Barros, Ricardo; Ferreira, Francisco; Molinas, José & Saveedra, Jaime (2009). "Measuring Inequality of Opportunities in Latin America and the Caribbean"; *The International Bank for Reconstruction and Development* / The World Bank.

Pistolesi, Nicolas (2008). "Inequality of opportunity in the land of opportunities, 1968-2001"; J*ournal of Economic Inequality*, Springer Netherlands.

Roemer, John E. (1998). "Equality of Opportunity"; *Harvard University Press*, Cambridge.

Roemer, John E. (2002). "Equality of opportunity: A progress report"; Social Choice and Welfare, Vol. 19, pp. 455-471.

Sánchez, Fabio (2007). "Las cuentas de la violencia"; Facultad de Economía de la Universidad de los Andes y Grupo Editorial Norma, ISBN 978-958-45-0324-4.

Skaperdas, Stergios (1992). "Conflict, and Power in the Absence of Property Rights"; *The American Economic Review*, Vol. 82, No. 4, pp. 720-739.

Skaperdas, Stergios & Syropoulos, Constantinos (1997). "The Distribution of Income in the Presence of Appropiative Activities"; *Economica*, New Series, Vol. 64, No. 253, pp. 101-117.

Wittenberg, Martin (2008). "To prey or not to prey? Welfare and individual losses in a conflict model"; *South African Journal of Economics*, Vol. 76, No. 2, pp. 239-265.

Apéndice

1. Derivación del resultado (10)

Las derivadas de las probabilidades q con respecto a los esfuerzos y son:

$$\frac{\partial q}{\partial l} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dl} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{(1 - u)L}{[ul + (1 - u)L]^2} \qquad (A1.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial L} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dL} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{(1 - u)l}{[ul + (1 - u)L]^2} \qquad (A1.2)$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en las condiciones de primer orden (10) y (11), tenemos:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{(1 - u)L}{[ul + (1 - u)L]^2} = \frac{d\gamma l^{\gamma-1}}{A} \qquad (A1.3)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{(1 - u)l}{[ul + (1 - u)L]^2} = \frac{d\gamma L^{\gamma-1}}{A} \qquad (A1.4)$$

Dividiendo las dos ecuaciones anteriores se obtiene el resultado esperado.

2. Derivación del resultado (12)

La forma logística que se asumió para q, implica lo siguiente:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = q(1 - q) \qquad (A2.1)$$

Insertando la anterior expresión en la ecuación (A1.4), se llega al resultado esperado.

3. Derivación del primer valor crítico (21)

De acuerdo con el supuesto de que la cantidad de trabajadores con bajo capital humano tiende más rápidamente a cero que los trabajadores con capital humano alto, hay que hallar el siguiente límite:

$$\lim_{N\to 0} \lim_{n\to 0} U^*_D > U^*_K$$

$$\lim_{N\to 0}\ \lim_{n\to 0}\ \frac{\theta}{G(N+n)}\ [N(1+w-q^*)+n\,(w+q^*)] > 1+w-q^*-\ \Gamma q(1-q^*)$$

$$\lim_{N\to 0}\ \frac{\theta}{GN}\ N(1+w-q) > 1+w-q^*-\Gamma q^*\,(1-q^*)$$

$$G < G_1 \equiv \theta\ \left[\frac{1+w-q^*}{1+w-q^*-\Gamma q^*(1-q^*)}\right] \tag{A3.1}$$

4. Derivación del resultado (26)

La condición $U^*_D = U^*_k$ con $N = 1 - u$ implica lo siguiente:

$$\frac{\theta}{G(1-u+n)}\ [(1-u)(1+w-q^*)+n(w+q^*)] > w+q^*-\ \Gamma q^*\,(1-q) \tag{A4.1}$$

De la ecuación (1) se despeja n en términos de R:

$$n = \frac{u-(1-u)R}{1+R} \tag{A4.2}$$

Introduciendo (A4.2) en (A4.1):

$$\frac{\theta-(1+R)}{G}\ [(1-u)(1+w-q^*)+\left(\frac{u-(1-u)R}{1+R}\right)(w+q^*)] > w+q^*-\ \Gamma q^*\,(1-q^*)$$

Despejando G de la ecuación anterior se encuentra el resultado esperado.

5. Derivación del resultado (29)

Hay que demostrar que $\frac{\partial A}{\partial G} = 0 \Longrightarrow G^* = \sqrt{\theta R}$.

De las ecuaciones (2) y (6):

$$\frac{\partial A}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial G}\left(p(w_H - w_L)\ \frac{1}{1+G}\right) = (w_H - w_L)\cdot\frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{(1+\theta R/G)^{-1}}{1+G}\right) = 0$$

Despejando G de la anterior ecuación diferencial se llega al resultado deseado.

6. Derivación del resultado (30)

El procedimiento es sencillo si se tiene presente en el Gráfico 1. La curva de defensa óptima $G^* = \sqrt{\theta R}$ puede cortar la curva de defensa en tres segmentos:

- ❐ En la recta de pendiente m e intercepto G_2.
- ❐ En la recta vertical con ecuación $R = U$.
- ❐ En la recta horizontal de ecuación $G = G_1$.

Las condiciones sobre el parámetro para que la curva de defensa óptima corte cualquiera de los segmentos mencionados son:

- ❐ $\theta > \frac{G_3^2}{U}$
- ❐ $\frac{G_1^2}{U} \leq \theta \leq \frac{G_3^2}{U}$
- ❐ $\theta > \frac{G_1^2}{U}$

En el primer caso, la curva corta una ecuación lineal. Por tanto, ambas funciones deben ser iguales en el punto de corte:

$$mR + G2 = \sqrt{\theta R} \qquad (A6.1)$$

Haciendo la sustitución $x = \sqrt{R}$, se resuelve la ecuación cuadrática correspondiente y se obtiene el valor de R. Dado que siempre es preferible una situación de menor gasto en defensa, los agentes trabajadores escogen la raíz que garantice el menor G. Por tanto, se escoge la raíz con el signo negativo (-) en la solución cuadrática. Como $R = x^2$, la solución es siempre positiva.

Por otro lado, para el segundo caso $R = U$, independientemente del punto de corte. Para el último caso, la curva de defensa óptima corta una recta horizontal y sólo habría que despejar R de la siguiente ecuación:

$$G_1 = \sqrt{\theta R} \qquad (A6.2)$$

Este procedimiento permite llegar al resultado esperado.

7. Demostración de los resultados (33), (34) y (37)

Primero, hay que demostrar $\frac{\partial G_2}{\partial i} > 0$:

$$\frac{\partial G_2}{\partial i} = \theta \left\{ \frac{[w + q^* + (1 - u)(1 - 2q^*)](1 - \Gamma(1 - 2q^*)) - [w + q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)](1 - 2(1 - u))}{[w+q^* - \Gamma q^*(1-q^*)]^2} \right\} \left(\overbrace{- \frac{\partial q^*}{\partial i}}^{+} \right) \qquad (A7.1)$$

Basta con demostrar que el denominador es positivo:

$$[w + q^* + (1 - u)(1 - 2q^*)](1 - \Gamma(1 - 2q^*)) - [w + q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)](1 - 2(1 - u)) \overset{?}{>} 0$$

Dado $\gamma = 1$ y reemplazando Γ, se tiene lo siguiente:

$$1 - \Gamma (1 - 2q^*) > 1 - 2(1 - u)) \Longleftrightarrow 1 - q2^* < 2\gamma$$

Esto permite concluir que:

$$[w + q^* + (1 - u)(1 - 2q^*)](1 - \Gamma (1 - 2q^*)) - [w + q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)](1 - 2(1 - u))$$

$$> [w + q^* + (1 - u)(1 - 2q^*)](1 - \Gamma (1 - 2q^*)) - [w + q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)](1 -\Gamma (1 - 2q^*)) \overset{?}{>} 0$$

Lo anterior implica:

$$w + q^* + (1 - u)(1 - 2q^*) - [w + q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)] \overset{?}{>} 0$$

$$\Longleftrightarrow (1 - u)(1 - 2q^*) + \Gamma q^*(1 - q^*) \overset{?}{>} 0 \qquad \textit{Q.E.D.}$$

$$\Longleftrightarrow (1 - 2q^*) \gamma + q^*(1 - q^*) > 0$$

La segunda demostración es similar:

$$\frac{\partial G_3}{\partial i} = \theta \left\{ \left[\frac{w + q^* - \Gamma q^*(1 - q) + (1 + w - q^*)(1 - \Gamma (1 -2q^*))}{[w + q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)]^2} \right] \right\} \left(- \overbrace{\frac{\partial q^*}{\partial i}}^{+} \right) \overset{?}{>} 0 \qquad (A7.2)$$

Nuevamente, hay que mostrar que el numerador es positivo:

$$w + q^* - \Gamma q(1 - q^*) + (1 + w -q^*)(1 -\Gamma(1 - 2q^*)) \overset{?}{>} 0$$

$$\Longleftrightarrow 1 + 2W - \Gamma [q^*(1 - q^*) + (1 + w - q^*)(1 - 2q^*) \overset{?}{>} 0 \qquad \textit{Q.E.D.}$$

$$> w + q^*(2 + 2w - q^*) > 0$$

Lo anterior, dado que $\Gamma < 1$.

Finalmente, la última derivada es la más sencilla:

$$\frac{\partial G_1}{\partial i} = \theta \left\{ \left[\frac{(1 + w - q^*)[1 + \Gamma(1 - 2q^*)] - [1 + w - q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)]}{[1 + w - q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)]^2} \right] \right\} \frac{\overbrace{\partial q^*}^{-}}{\partial i} \overset{?}{<} 0 \qquad (A7.3)$$

Es suficiente con demostrar que el numerador de la expresión anterior es positivo:

$$(1 + w - q^*)[1 + \Gamma (1 - 2q^*)] - [1 + w - q^* - \Gamma q^*(1 - q^*)] \overset{?}{>} 0 \qquad Q.E.D.$$

$$\Leftrightarrow (1 + w - q^*)(1 - 2q^*)] + q (1 - q^*)] > 0$$